Demi – finale du 19 mars 2022

1. Les neuf jetons

Nous devons enlever 3 jetons sur une grille de telle sorte qu'il en reste 2 par ligne et 2 par colonne.
Autrement dit, nous devons enlever :

- 1 jeton dans chacune des 3 lignes
- 1 jeton dans chacune des 3 colonnes

Après quelques essais, nous trouvons 6 possibilités…
Pour chacune d'elle, les jetons enlevés ont été noircis et le résultat de l'addition des 3 jetons enlevés est inscrit sous la grille :

5	4	3
6	**1**	2
7	8	**9**
15		

5	4	3
6	1	**2**
7	**8**	9
15		

5	**4**	3
6	1	2
7	8	**9**
19		

5	**4**	3
6	1	**2**
7	8	9
13		

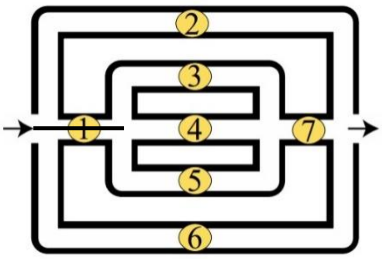
5	4	**3**
6	1	2
7	**8**	9
17		

5	4	**3**
6	**1**	2
7	8	9
11		

Nous cherchons le plus grand résultat possible : **19**.

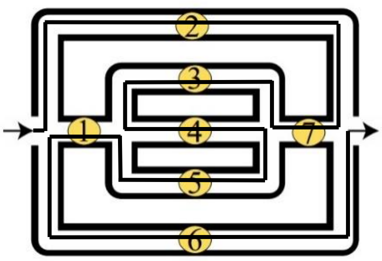
2. Le fil d'Ariane

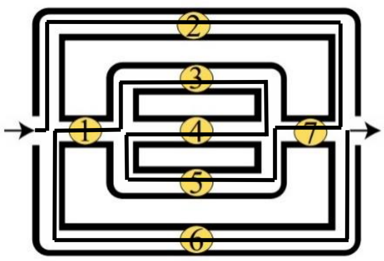
Dans cet exercice, il existe des choix à ne pas faire.
Si nous prenons la pièce 1 pour commencer, nous ne pourrons pas terminer :

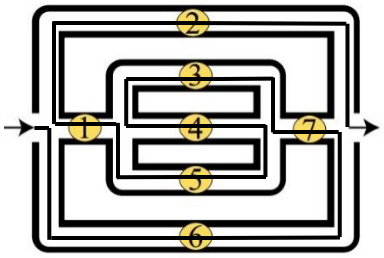


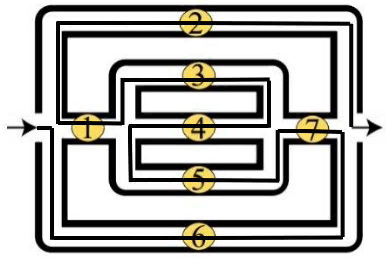
En revenant chercher la pièce 2 ou 6, nous serons obligés de croiser le fil déjà déroulé pour continuer.

Il existe 4 chemins possibles que voici :





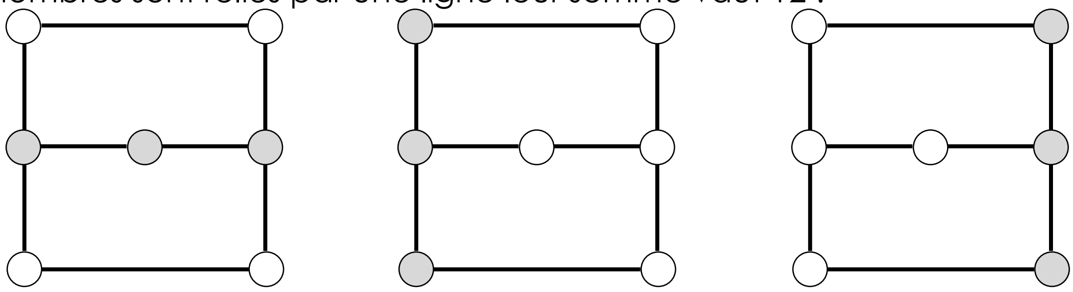




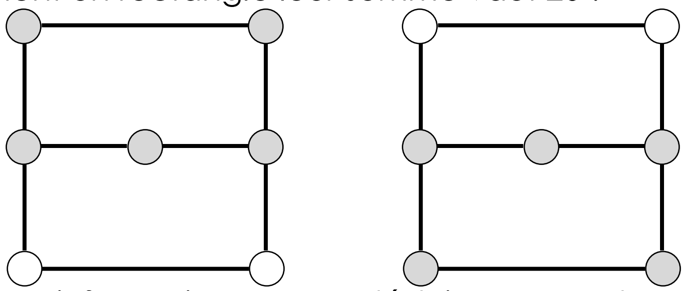
Chacun de ces 4 chemins nous amène à la même solution.
La 4ème pièce ramassée est la **4** et le 6ème est la **1**.

3. De 1 à 7

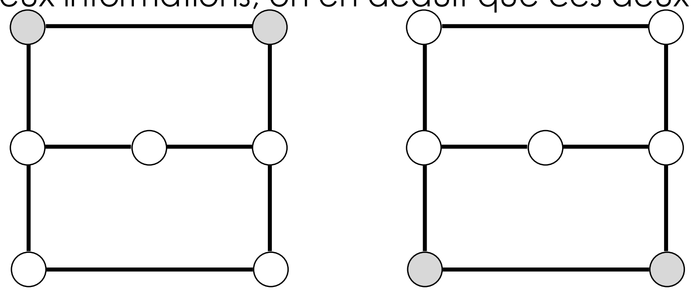
Si 3 nombres sont reliés par une ligne leur somme vaut 12 :



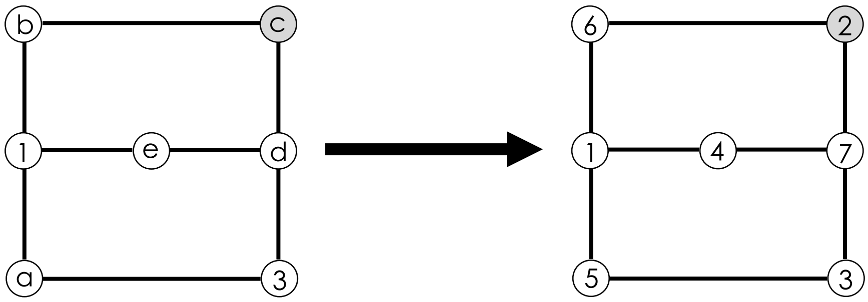
Si 5 nombres forment un rectangle leur somme vaut 20 :



En utilisant ces deux informations, on en déduit que ces deux lignes doivent valoir 8 :



Nous pouvons dès lors facilement remplir notre grille en complétant les cases a, b, c, d, puis e :

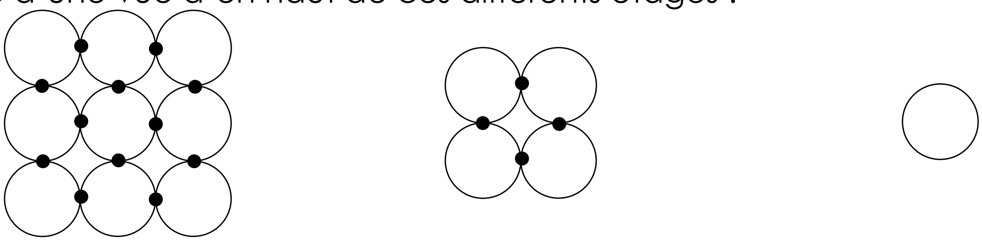


La solution demandée est le nombre dans la case grisée : **2**.

4. Le nombre de Mathilde
Prenons un nombre à 2 chiffres au hasard : le 73.
Si nous additionnons ces deux chiffres, nous obtenons 7 + 3 = 10.
Si nous multiplions ces deux chiffres, nous obtenons 7 x 3 = 21.
Or 21 n'est pas le double de 10. Ça ne fonctionne pas avec 73.

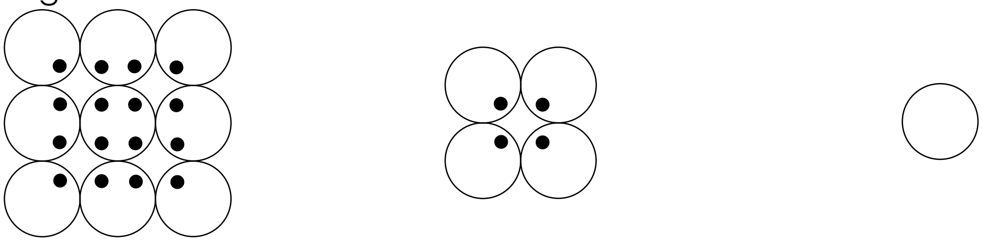
Après une petite recherche, nous trouvons le premier cas qui fonctionne :
3 x 6 = 18 vaut le double de 3 + 6 = 9.
La solution est donc **36**.

5. Les boules de pétanque
Commençons par compter les contacts entre les boules d'un même étage à l'aide d'une vue d'en haut de ces différents étages :



Etage inférieur Etage intermédiaire Etage supérieur

Continuons en comptant les contacts entres les boules d'un étage et celles de l'étage du dessus :



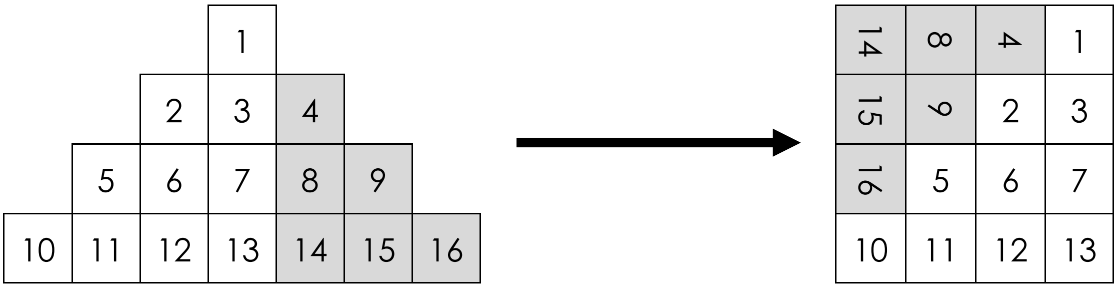
Etage inférieur Etage intermédiaire Etage supérieur

Cette pyramide comporte **36** points de contacts entre les boules de pétanque.

6. La pyramide de Mathilde
Déterminons le nombre de blocs par ligne :

- La 1ère en contient 1,
- La 2ème en contient 1 central et 1 qui a été ajouté de chaque côté, donc 3,
- La 3ème en contient 1 central et 2 qui ont été ajoutés de chaque côté, donc 5,
- La 4ème en contient 1 central et 3 qui ont été ajoutés de chaque côté, donc 7,
- …
- La 22ème en contient 1 central et 21 qui ont été ajoutés de chaque côté, donc 43.

La 4ème ligne se termine par 16 qui correspond à 4 x 4 et ce n'est pas un hasard :

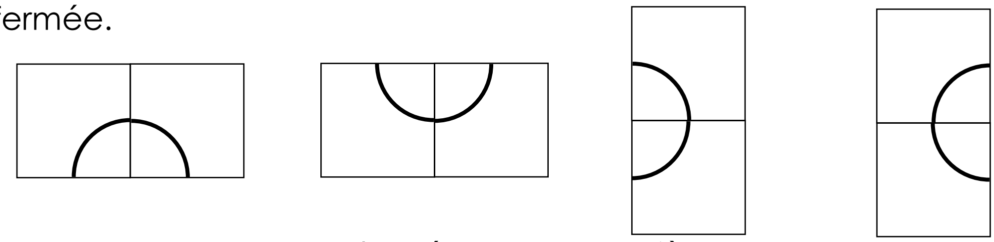


Nous pouvons comprendre que la 21ème ligne se termine par 21 x 21 = 441.

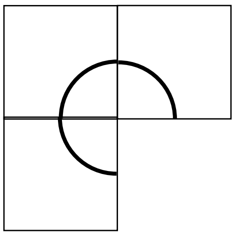
Notre 22ème ligne commence par 442 et contient 43 blocs.
Elle sera constituée de 22 blocs pairs (dont le premier et le dernier) et de **21** blocs impairs.

7. Les cartes de Mathias

Les 4 motifs suivants doivent apparaître au moins une fois sur notre courbe fermée.



Nous pouvons tenter d'être économe en pièces en superposant 2 de ces motifs. Prenons le 1er et le 4ème motif, par exemple :

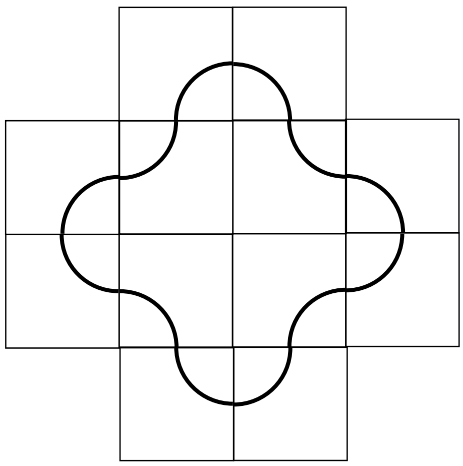


La carte suivante va fermer la courbe (interdit par la consigne) ou briser la courbe (ce qui nous empêche de terminer).

Les 4 motifs ci-dessus doivent apparaître séparément les uns des autres.
Si nous voulons être économe en pièces, nous devons essayer de relier les uns avec les autres en utilisant à chaque fois une seule carte.

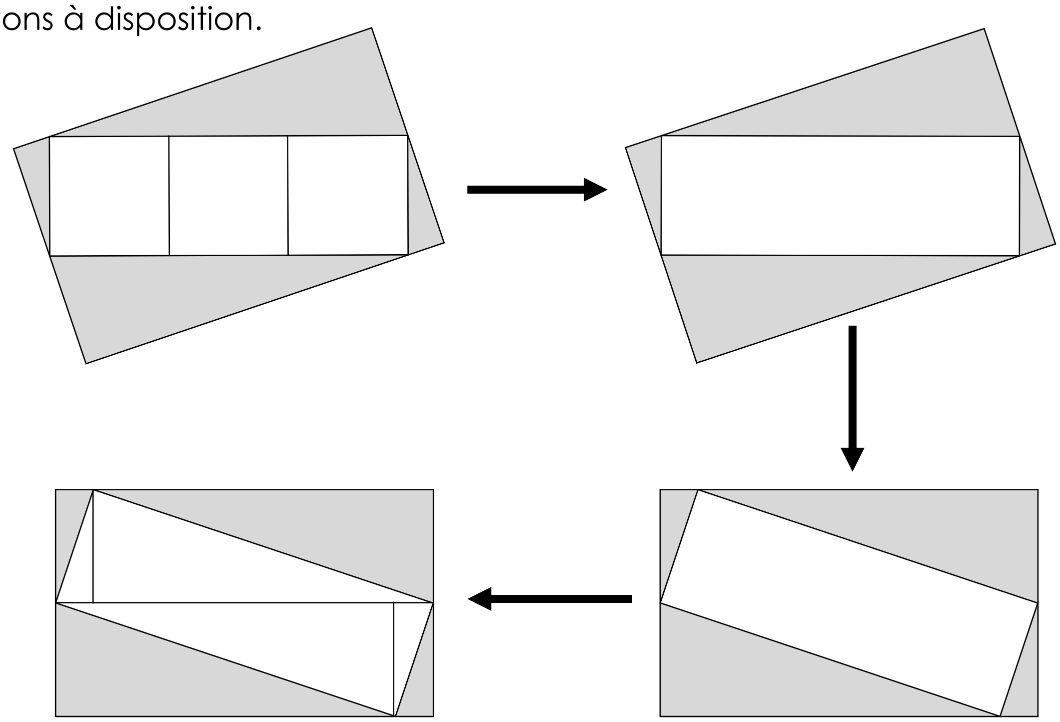
Et c'est possible ! Comme nous le voyons-ci-contre.

Il nous faut au minimum **12** cartes pour construire une ligne fermée.



8. Trois carrés sur un rectangle

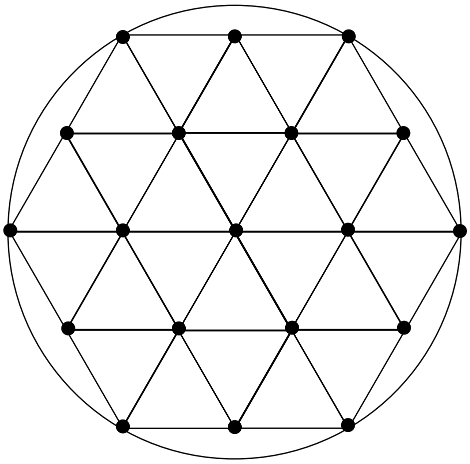
N'oublions pas que 2 sommets opposés du rectangle blanc sont situés au milieu de deux côtés opposés du rectangle gris et observons ce que nous avons à disposition.



Nous constatons que la partie blanche (3 x 22 = 66) occupe la même surface que la partie grise qui n'est pas recouverte.

Le rectangle gris a une aire de 2 x 66 cm^2, donc **132** cm^2.

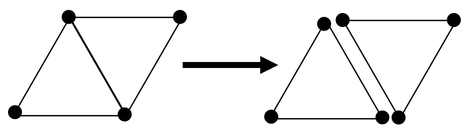
9. Piquets et enclos



Au vu de l'aire du terrain et de celui des enclos. Nous pouvons au maximum construire 29 enclos. Chaque enclos ayant besoin de 3 piquets, nous pourrions utiliser un maximum de 57 piquets mais la réalité est très différente. Il est impossible d'occuper tout le disque avec des triangles. La figure ci-contre le montre.

En optimisant, nous arrivons à construire 24 enclos. Nous ne voyons pas comment optimiser davantage la situation.

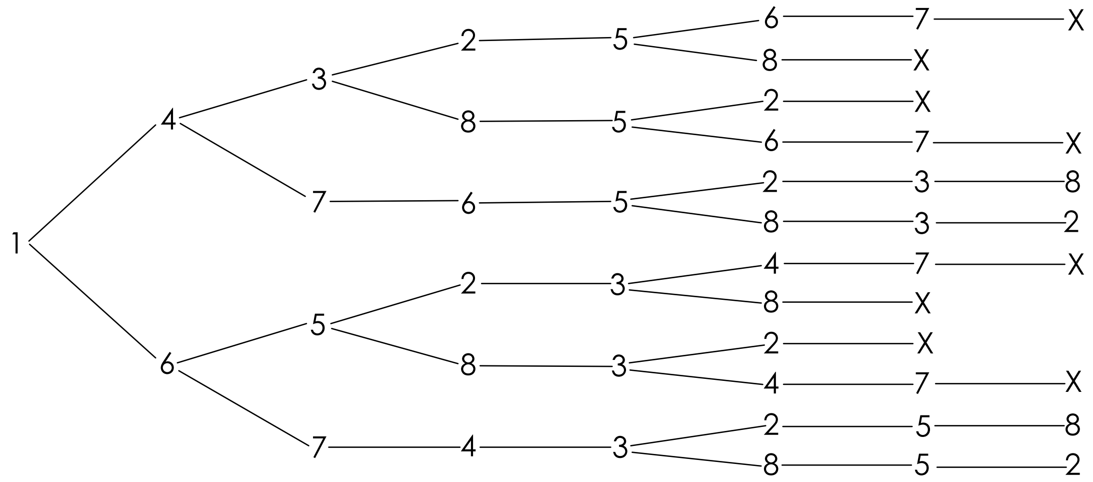
De plus, il nous semble impossible d'éloigner 2 de ces enclos ce qui permettrait d'utiliser plus de piquets comme le montre la deuxième figure ci-contre.



Le maximum de piquets est de **19**.

10. Les 8 cartes
La carte 1 est placée.
Nous ne pouvons pas la faire suivre par la 3, la 5 ou la 7 car la somme des 2 cartes serait un nombre divisible par 2.
Nous ne pouvons pas la faire suivre par la 2, la 5 ou la 8 car la somme des 2 cartes serait un nombre divisible par 3.
Elle peut être suivie par la carte 4 (1 + 4 = 5) ou la carte 6 (1 + 6 = 7).

Poursuivons ce raisonnement carte par carte :



Nous aboutissons à **4 solutions** : **14765238**, **14765832**, **16743258**, **16743825**.

11. La somme de l'année
S'il n'y avait que des +, nous trouverions 5'050.
En effet, 1 + 100 + 2 + 99 + 3 + 98 + … + 49 + 52 + 50 + 51 = 5'050

Si nous transformons, par exemple le +10 en –10, nous n'ajoutons plus ce 10 mais nous l'enlevons. Nous perdons donc 20.

Notre souhait est de passer d'un résultat de 5'050 à 2'022. Nous devons perdre 3'028. Nous devons transformer les signes + en signes – devant des nombres dont la somme vaut 1'514 (3'028 : 2).

Nous nous devons également de placer le moins de signes – possible. Voici une proposition avec 17 fois le signe – qui serait placé :
100 + 99 + … + 86 + 85 + 34 = 1'514
En plaçant 17 signes – devant les nombres de 85 à 100, ainsi que le 34, nous obtenons 2'022.

Notre objectif est que le plus petit nombre utilisé (34 dans ce cas) soit le plus grand possible.

Tentons d'augmenter la valeur du plus petit nombre en diminuant celle des autres termes.

1'514 =
34 + 85 + 86 + … + 99 + 100 =
50 + 84 + 85 + … + 98 + 99 =
66 + 83 + 84 + … + 97 + 98 =
82 + 82 + 83 + … + 96 + 97
La dernière ligne n'est pas acceptable car nous utilisons 2 fois le terme 82.
Un dernier décalage nous mène vers la solution optimale cherchée.

1'514 = 81 + 82 + 83 + … + 95 + 96 + 98

Le premier nombre précédé d'un signe moins sera le nombre **81**.

12. Les billets de loterie
Le numéro sur le billet de Mathias est se situe entre 9'123 et 9'876.
Si nous doublons cela, nous obtiendrons un nombre compris entre18'246 et 19'752.
Or nous ne devons utiliser qu'une fois chaque chiffre. Le numéro de Mathilde commence par 18.

Voici la situation :

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & x & y & z \\ \cdot & & & & 2 \\ \hline 1 & 8 & a & b & c \end{array}$$

- Si x vaut 2, a peut valoir 4 ou 5.

  Analysons cela :

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 2 & y & z \\ \cdot & & & & 2 \\ \hline 1 & 8 & 4 & b & c \end{array}$$

  - Pour continuer, z doit valoir 3 et c 6, et nous sommes bloqués.

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 2 & y & z \\ \cdot & & & & 2 \\ \hline 1 & 8 & 5 & b & c \end{array}$$

  - Nous pouvons continuer avec z qui vaut 3 et c 6. Cela nous mène vers une solution : 2 · 9'273 = 18'546.

  - Nous pouvons aussi continuer avec z qui vaut 7 et c 4. Cela nous mène vers une autre solution : 2 · 9'267 = 18'534.

- Si x vaut 3, a peut valoir 6 ou 7.

  Analysons cela :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 9 & 3 & y & z \\
\cdot & & & & 2 \\
\hline
1 & 8 & 6 & b & c
\end{array}
$$

  - Nous pouvons continuer avec z qui vaut 2 et c4, et nous sommes bloqués.
  - Nous pouvons aussi continuer avec z qui vaut 7 et c4. Cela nous mène vers une autre solution : 2 · 9'327 = 18'654.

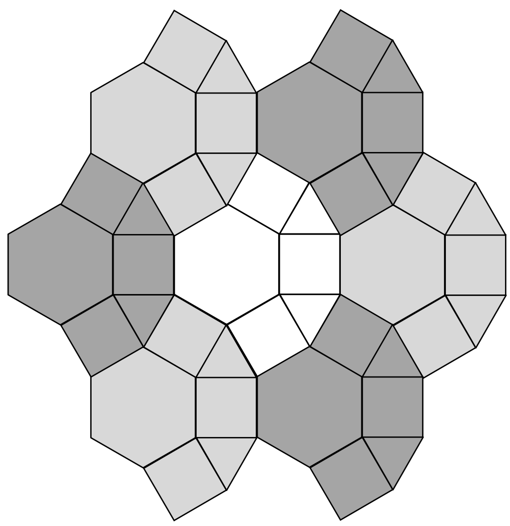
$$
\begin{array}{ccccc}
 & 9 & 3 & y & z \\
\cdot & & & & 2 \\
\hline
1 & 8 & 7 & b & c
\end{array}
$$

  - Nous pouvons continuer avec z qui vaut 2 et c 4, et nous sommes bloqués.
  - Nous pouvons aussi continuer avec z qui vaut 6 et c 2, et nous sommes bloqués.

- Si la valeur de x est différente de 2 ou de 3, nous sommes bloqués.

Il existe donc **3 solutions**.
Le ticket de Mathilde comporte le numéro **18'534**, **18'546** ou **18'654**.

13. Le pavage de Diane
Le dessin ci-contre nous permet de comprendre quel motif se répète.



Dans ce motif, nous comptons 1 hexagone pour 6 polygones.

Dans ce pavage, le rapport cherché est $\frac{1}{6}$.

14. LEON et NOEL

LEON et NOEL sont des nombres pairs qui ne commencent pas par 0.
Le N et le L peuvent valoir 2, 4, 6 ou 8 et doivent être différents.

LEON peut s'écrire 1'000 · L + 100 · E + 10 · O + N.
Nous en déduisons que LEON + NOEL = 1'001 · (L + N) + 110 · (E + O).
Ce nombre doit être un multiple de 13.
1'001 étant un multiple de 13, il est nécessaire que E + O le soit également.
E et O valent 4 et 9, ou 5 et 8, ou 6 et 7.

Avec ces filtres, il nous reste 36 cas possibles à analyser. Cela devient envisageable.

LEON	M_7	LEON	M_7	LEON	M_7
2'496	non	2'584	non	2'674	oui
2'498	non	2'586	non	2'678	non
6'492	non	4'582	non	4'672	non
6'498	non	4'586	non	4'678	non
8'492	non	6'582	non	8'672	non
8'496	non	6'584	non	8'674	non
2'946	non	2'854	non	2'764	non
2'948	non	2'856	oui	2'768	non
6'942	non	4'852	non	4'762	non
6'948	non	4'856	non	4'768	non
8'942	non	6'852	non	8'762	non
8'946	oui	6'854	non	8'764	oui

Il existe **4 solutions** : **2'674**, **2'856**, **8'764**, **8'946**.

15. Les étoiles de l'année

Pour former une étoile, il est nécessaire de passer par tous les sommets du polygone avant de revenir sur notre point de départ.

Déterminons les conditions pour obtenir un polygone étoilé en joignant les sommets de a en a dans un polygone à b sommets.

- Si a vaut 1, nous formerons le polygone lui-même et pas un polygone étoilé.
- Si a est un diviseur de b, nous formerons un polygone régulier à $\frac{b}{a}$ côtés.
- Si a n'est pas un diviseur de b mais que a et b ont un diviseur commun différent de 1 que nous nommerons c, nous formerons un polygone étoilé à $\frac{b}{c}$ côtés.

Nous en déduisons que a et b doivent être premiers entre eux si nous voulons construire un polygone étoilé à b côtés.

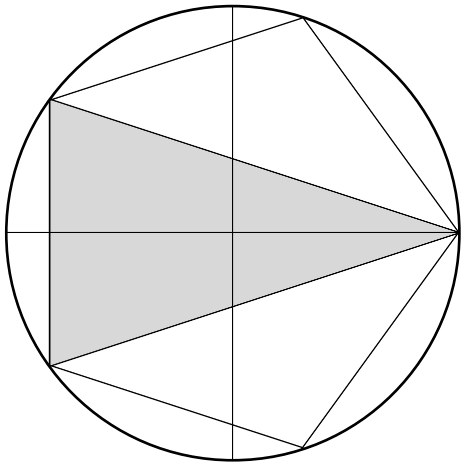
Précisons qu'en joignant les sommets de a en a ou de b – a en b – a, nous obtenons la même figure.

Nous cherchons donc à savoir combien il existe de nombres inférieurs à 1'011 qui sont premiers avec 2'022.
Or 2'022 = 2 · 3 · 337.
Les nombres cherchés ne doivent pas être divisibles par 2 ou par 3 (ni par 337). Le crible d'Eratosthène nous permet de comprendre que ces nombres suivent ou précèdent immédiatement les multiples de 6.
Il en existe 336 inférieur à 1'011. En effet, 1'008 = 168 · 6 et 336 = 2 · 168.
Mais parmi eux, nous trouvons 337 qu'il ne faut pas prendre.

Nous en déduisons qu'il existe **335** polygones étoilés différents à 2'022 sommets.

16. Un triangle sur pentagone

Avouons-le, ce problème est loin d'être trivial et encore moins en situation de concours. Après quelques essais et quelques calculs estimés, nous pouvons penser que le cas ci-contre est celui qui permet la construction du plus grand triangle possible inscrit dans un pentagone régulier donné.



Fixons le rayon de ce cercle à une unité.
Et précisons que dans ce qui va suivre, quelques identités trigonométriques vont être utilisées.

Le pentagone est formé de 5 triangles isocèles (côtés isométriques ayant une longueur de 1 et formant entre eux un angle de 72°) :

$$A_{pentagone} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 72° = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36°$$

Passons au triangle grisé :

$$A_{triangle} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \sin 36°) \cdot (1 + \cos 36°) = \sin 36° \cdot (1 + \cos 36°)$$

D'où le rapport cherché :

$$Rapport = \frac{\sin 36° \cdot (1 + \cos 36°)}{5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36°} = \frac{1 + \cos 36°}{5 \cdot \cos 36°}$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la valeur de cos 36° si nous ne l'avons pas en mémoire. Voici une méthode parmi d'autres :

$\cos 36° = \cos^2 18° – \sin^2 18° = 1 – \sin^2 18° – \sin^2 18° = 1 – 2 \sin^2 18°$
$\sin 72° = 2 \sin 36° \cos 36° = 4 \sin 18° \cos 18° (1 – 2 \sin^2 18°)$
$\sin 72° = \cos (90° – 72°) = \cos 18°$

Des 2 dernières égalités, nous en déduisons que : $1 = 4 \sin 18°(1 – 2 \sin^2 18°)$

En posant $\sin 18° = x$, nous obtenons : $8x^3 – 4x + 1 = 0$
Ce polynôme possède une racine simple qui est $\frac{1}{2}$.
L'équation devient $(x – \frac{1}{2})(8x^2 + 4x – 2) = (2x – 1)(4x^2 + 2x – 1) = 0$
Les deux autres solutions de cette équation sont : $\frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}$
La valeur que nous cherchons est positive.
Nous en déduisons que $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et que $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$Rapport = \frac{5+\sqrt{5}}{5\sqrt{5}+5} = \frac{(5+\sqrt{5})(5\sqrt{5}-5)}{125-25} = \frac{20\sqrt{5}}{100} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Il nous suffit d'utiliser la valeur fournie pour obtenir la réponse souhaitée. Le rapport est de **0,447**.

17. Les polygones de Mathilde

Les angles intérieurs d'un polygone régulier à n côtés ont une valeur en degré de $180° - \frac{360°}{n}$.

Notre objectif est d'obtenir l'égalité suivante avec $3 \leq a < b < c$ qui représentent le nombre de côtés de nos polygones :

$$180° - \frac{360°}{a} + 180° - \frac{360°}{b} + 180° - \frac{360°}{c} = 360°$$

D'où l'équation diophantienne :

$$\frac{360°}{a} + \frac{360°}{b} + \frac{360°}{c} = 180°$$

Analysons méthodiquement les cas possibles :

a	b	c	$\frac{360°}{a}$	$\frac{360°}{b}$	$\frac{360°}{c}$
3	7	42	120°	$\frac{360°}{7}$	$\frac{360°}{42}$
3	8	24	120°	45°	15°
3	9	18	120°	40°	20°
3	10	15	120°	36°	24°
4	5	20	90°	72°	18°
4	6	12	90°	60°	30°

Il nous suffit d'additionner le nombre de côtés des 3 polygones pour trouver les **6 solutions** : **52**, **35**, **30**, **28**, **29** et **22**.

18. Un triangle très entier
Comme souvent à ce stade du concours, nous pouvons utiliser le théorème de Héron.

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, avec a, b et c la longueur des côtés et p le demi-périmètre.
Nous pouvons facilement nous convaincre que p est un nombre entier.

Or la consigne nous apprend que A = 2p.
En élevant au carré, nous en déduisons que :
(p – a)(p – b)(p – c) = 4p.

De plus (et il s'agit d'un très bel artifice qui m'a été soufflé par Benjamin Favre) : (p – a) + (p – b) + (p – c) = p.

Nous cherchons trois nombre entiers (p – a, p – b et p – c) dont le produit est le quadruple de la somme. Postulons que x ≤ y ≤ z et déterminons les valeurs de ces 3 variables afin que :

4x + 4y + 4z = xyz d'où : $z = \frac{4x+4y}{xy-4}$

- Si x = 1 $z = \frac{4+4y}{y-4}$
  - Si y = 5, alors z = 24
  - Si y = 6, alors z = 14
  - Si y = 8, alors z = 9

- Si x = 2 $z = \frac{8+4y}{2y-4}$
  - Si y = 3, alors z = 10
  - Si y = 4, alors z = 6

- Si x = 3 $z = \frac{12+4y}{3y-4}$
  - Pas de solution

- Si x = 4 $z = \frac{16+4y}{4y-4}$
  - Plus de solution envisageable avec y et z supérieurs à x

Nous cherchons le périmètre, c'est-à-dire 2p = 2(x + y + z).

Nous avons **5 solutions** avec des longueurs en dam : **60**, **42**, **36**, **30**, **24**.