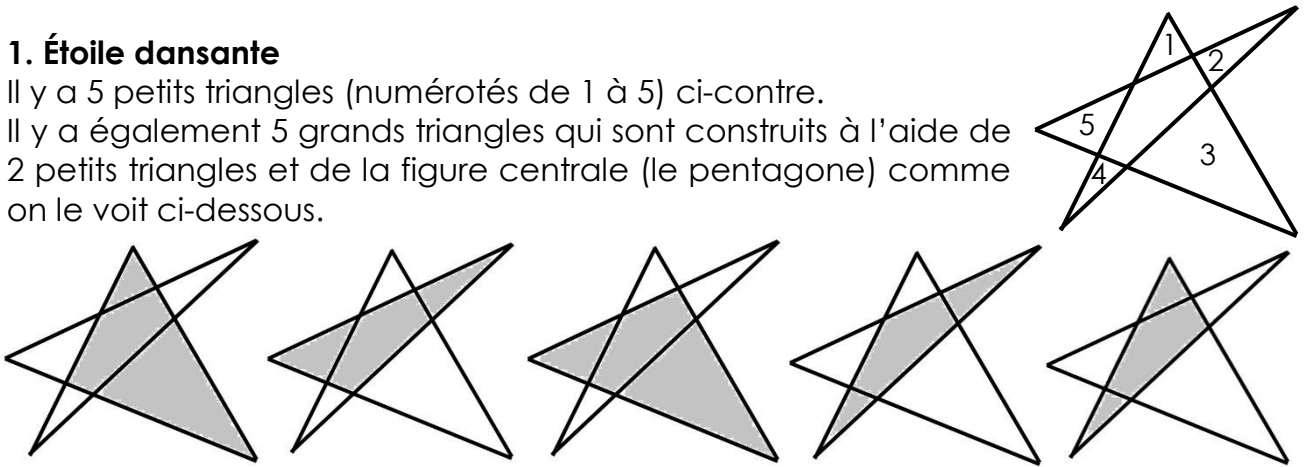


Demi – finale du 14 mars 2026

1. Étoile dansante

Il y a 5 petits triangles (numérotés de 1 à 5) ci-contre.

Il y a également 5 grands triangles qui sont construits à l'aide de 2 petits triangles et de la figure centrale (le pentagone) comme on le voit ci-dessous.



Nous dénombrons donc **10 triangles**.

2. Les jetons de Mathurine

Après quelques essais, nous nous rendons compte qu'il n'est pas possible de placer 4 jetons dans une case.

Dans chacune des 2 lignes et dans chacune des 2 colonnes, il y aura dans les 3 cases : 1, 2 et 3 jetons.

Nous pouvons en déduire qu'il y a 2 jetons en haut, à droite. Nous pouvons compléter également 2 autres cases pour obtenir ceci :

3	1	2
		1
		3

Il nous reste 4 jetons. Si nous en plaçons 1 seul en bas à gauche, cela ne fonctionne pas. Nous n'avons pas assez de jetons à disposition. Nous aboutissons sur la seule solution possible :

3	1	2
1		1
2	1	3

Complément : Chaque ligne peut contenir au maximum $1 + 2 + 3 = 6$ jetons. Deux lignes contiennent au maximum 12 jetons et nous en avons 14. Nous pouvons en déduire que les 2 cases occupées dans la 2^e ligne doivent contenir 1 seul jeton. Il en va de même pour les 2 cases de la 2^e colonne.

3. Les cubes

Réfléchissons étage après étage en commençant par le haut.

Au 4^e étage, nous voyons 4 cubes. Nous sommes certains que sous ces 4 cubes, il y a également des cubes (les cubes ne peuvent pas flotter).

Cela nous permet de savoir où se situent les cubes. Nous pouvons le modéliser avec ces vues d'en haut :

X	X		
X			X

4^e étage

X	X	X	
X	X	X	X
X		X	

3^e étage

X	X	X	X
X	X	X	X
X		X	

2^e étage

X	X	X	X
X	X	X	X
X		X	X

1^{er} étage

Nous dénombrons donc **14 cubes gris** (4 + 10) et **20 cubes blancs** (9 + 11).

4. Multiplication à compléter

Nous multiplions 8 par un nombre à 3 chiffres et nous obtenons un nombre à 4 chiffres commençant par 7.

Or $8 \times 700 = 5'600$. Ce résultat est inférieur à celui que nous souhaitons $7'_{_}_{_}$.

Nous devons effectuer l'opération suivante : $8 \times 93_{_}$.

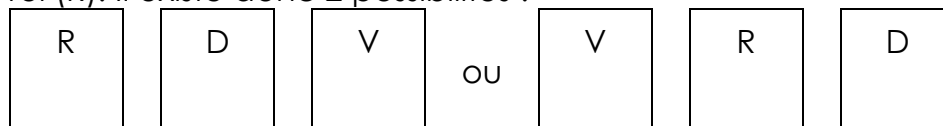
Il nous reste, au maximum, 4 calculs à effectuer.

La seule possibilité qui fonctionne est 8×932 , nous trouvons un résultat de $7'456$. Cela fonctionne, nous avons bien utilisé tous les chiffres disponibles.

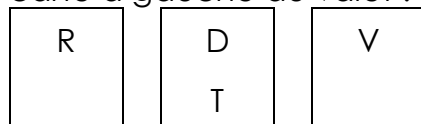
Le résultat est **7'456**.

5. Les trois cartes

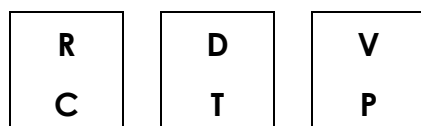
La deuxième phrase nous apprend que la dame (D) se trouve juste à droite du roi (R). Il existe donc 2 possibilités :



Or la première phrase nous apprend que le trèfle (T) se trouve juste à gauche du valet (V). Nous devons conserver le premier cas ci-dessus pour avoir une carte à gauche du valet :



La dernière phrase nous apprend que le cœur (C) se trouve juste à gauche du trèfle. Nous pouvons savoir où se situe le cœur et en déduire où se situe le pique (P) :



6. Pesées

La deuxième balance nous apprend que 2 paquets blancs pèsent exactement 100 g.

Chaque paquet blanc pèse 50 g.

La première balance nous apprend que 3 paquets gris pèsent exactement 90g (50 g + 40 g).

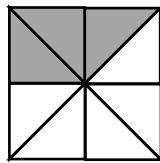
Chaque paquet gris pèse 30 g.

Lors de la dernière pesée, nous avons 80 g à gauche (50 g + 30 g) et la masse avec le point d'interrogation pèse également **80 g**.

7. Trois sur huit

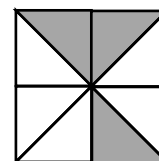
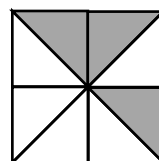
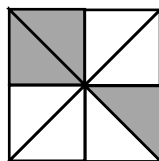
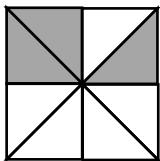
Commençons par une remarque liminaire : l'objet imprimé peut être tourné et retourné.

Les 3 triangles noirs peuvent être collés les uns aux autres comme ceci :

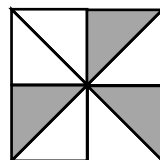
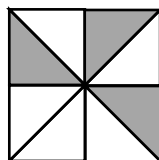


Il n'existe pas d'autres possibilités de coller 3 triangles noirs. Toutes les autres sont obtenues par symétrie.

Nous pouvons également coller 2 triangles ensemble pour former un carré (ou un grand triangle). L'espace entre ce carré (ou ce grand triangle) et le troisième triangle noir peut être de 1 ou 2 triangles blancs :



Nous pouvons finalement séparer ces 3 triangles noirs. Il y a 5 espaces blancs à disposition pour le faire. Les espacements peuvent être de 1, 1 et 3 ou de 1, 2 et 2 :



Il existe donc **7 possibilités**.

8. Marienbad

Au 3^e tour, Bad enlève 6 bâtonnets. Il est obligé de le faire dans la rangée de 7 bâtonnets (4^e rangée) qui doit être intacte à ce moment-là (si on en avait enlevé 2 avant, il n'en resterait que 5).

Aux 2 premiers tours, Bad et Marie ont dû enlever 2 bâtonnets dans les rangées de 3 bâtonnets (2^e rangée) ou de 5 bâtonnets (3^e rangée).

Voici les possibilités :

Bad : 2 en rangée n°	Marie : 2 en rangée n°	Bad : 6 en rangée n°	Il reste			
			1 ^{ère} rangée	2 ^e rangée	3 ^e rangée	4 ^e rangée
2	3	4	1	1	3	1
3	2	4	1	1	3	1
	3	4	1	3	1	1

Marie va jouer et elle se trouvera toujours face à la même situation : 3 rangées avec 1 bâtonnet et 1 rangée avec 3 bâtonnets.

Elle doit prendre les **3 bâtonnets**. La suite est forcée : Bad en prendra 1, Marie un autre et Bad le dernier.

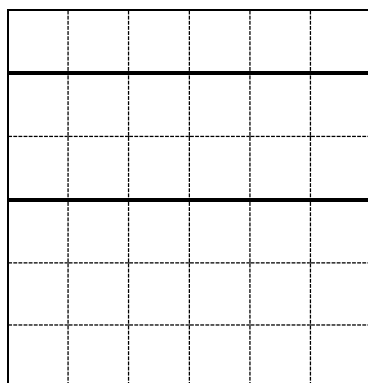
9. Le Corbusier

Ce carré de 6 sur 6 sera séparé par 3 segments verticaux ou horizontaux en 6 parties.

Ces 3 segments ne peuvent pas être tous parallèles car il n'y aurait que 3 parties.

Il y aura donc 2 segments horizontaux et 1 segment vertical (ou le contraire ce qui est pareil à une rotation près)

Les 2 segments horizontaux doivent couper le carré en 3 parties différentes sinon il y aurait forcément 2 parties de même surface :



Partager ici créerait des zones de même surface

Partager ici créerait 2 zones dont l'aire serait de 4 carreaux

Le partage doit être fait ainsi :

Les valeurs des aires par ordre croissant sont les suivantes : **1, 2, 3, 5, 10, 15.**

10. Le détecteur

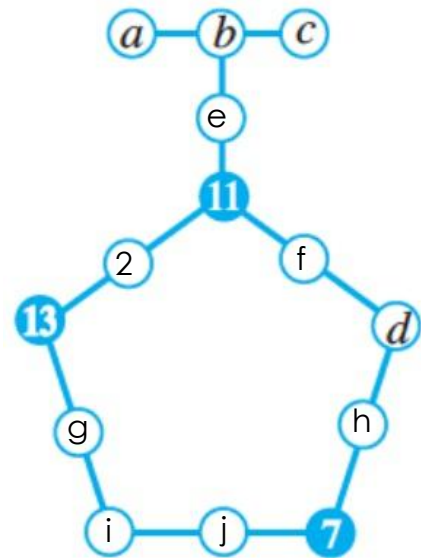
Aidons-nous du dessin ci-contre pour comprendre que :

$$i + j = h + d = 19 \text{ (car } 19 + 7 = 26)$$

Valeurs de i et j , ou, de h et d :

- 14 et 5
- 13 et 6 (non car 13 est utilisé)
- 12 et 7 (non car 7 est utilisé)
- 11 et 8 (non car 11 est utilisé)
- 10 et 9

Nous savons que i, j, h et d vaudront 14, 5, 10 et 9.
Nous ne savons pas quelle lettre prendra quelle valeur.



Il restera à placer les nombres 1, 3, 4, 6, 8 et 12 dans les autres disques.

Or, $a + b + c = 26$, c'est uniquement faisable avec 6, 8 et 12.

- Si $b = 6$, $e = 9$, c'est impossible
- Si $b = 8$, $e = 7$, c'est impossible
- Donc $b = 12$ et $e = 3$

Les deux derniers disques (g et f) contiennent 1 et 4.

- Si $g = 1$, $i = 12$, c'est impossible
- Donc $g = 4$ et $f = 1$, ce qui signifie que $d = 14$.

Nous trouvons la seule solution : $b = 12$ et $d = 14$.

11. La caissière étourdie

Nous pourrions poser une équation diophantienne mais les élèves de 8H ne maîtrisent pas cela. Faisons quelques essais à l'aide du tableau suivant (dans la case noire, par exemple, nous trouvons $13 = 2^2 + 3^2$) :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
3	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90
4	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
5	25	26	29	34	41	50	61	74	89	106
6	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117
7	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Or 13 n'est pas égal à $23 - 1$ donc cette réponse n'est pas acceptable.

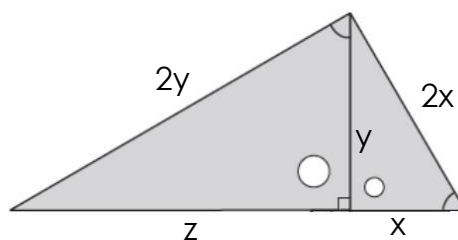
Cependant, $3^2 + 5^2 = 35 - 1$ et $7^2 + 5^2 = 75 - 1$. Ce sont des cas répondant à la consigne.

Il existe **2 solutions** : Mathilde a payé son jeu **34 euros ou 74 euros**.

12. Les quatre équerres

Observons les 2 premiers triangles (ce sont des demi-triangles équilatéraux) et cherchons à comprendre par quel facteur il faut multiplier l'aire du petit pour obtenir l'aire du grand.

Si nous trouvons ce facteur, il nous permettra de déterminer l'aire des autres triangles également.



Utilisons le théorème de Pythagore :

$$y = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$$2y = 2\sqrt{3}x$$

Utilisons à nouveau ce théorème :

$$z = \sqrt{(2y)^2 - y^2} = \sqrt{3y^2} = \sqrt{3}y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}x = 3x$$

L'aire du petit triangle est de : $\frac{xy}{2}$, et celle du grand triangle : $\frac{zy}{2} = \frac{3xy}{2}$

Nous comprenons que l'aire du grand triangle est 3 fois plus grande que celle du petit.

Dans notre problème l'aire du petit triangle est de 26 cm^2 et celle des suivants est de 78 cm^2 ($26 \cdot 3$), puis de 234 cm^2 ($78 \cdot 3$) et **702 cm^2** ($234 \cdot 3$).

13. Du pain tous les jours

Le premier boulanger peut fermer le lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi ou dimanche.

S'il ferme le lundi, le deuxième boulanger a 7 jours de fermeture possibles. S'il ferme le mardi, il en va de même, etc.

Les 2 premiers boulangers ont $7 \cdot 7 = 49$ possibilités de fermer leur boulangerie un jour chacun par semaine.

Avec 5 boulangers, il y a $7^5 = 16'807$ possibilités.

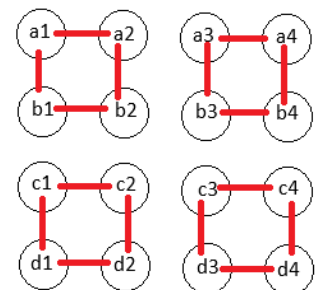
Cependant, il y a 7 possibilités à enlever (celle où tous les boulangers ont fermé le lundi, ou tous ont fermé le mardi, etc.).

Il existe donc **16'800 possibilités**.

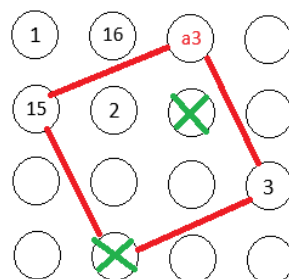
14. Carrés fantastiques

Déterminons tout d'abord la somme à obtenir dans chaque carré : la somme des nombres de 1 à 16 vaut 136 ($16 \cdot 17 / 2$). Chaque carré doit donc aboutir à une somme de 34 ($136 / 4$).

(On peut aboutir au même résultat en constatant que la moyenne de toutes les cases vaut 8.5 et donc qu'un carré a une somme de $4 \cdot 8.5 = 34$)

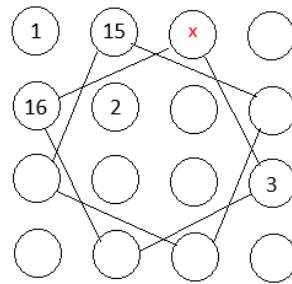


Il faut donc placer le 15 et le 16 dans le 1^{er} carré en haut à gauche. Nous avons deux possibilités :



La première ne fonctionne pas, car les deux cases en vert devraient contenir le même nombre. ($16 - a3$)

La seule possibilité est donc la suivante :

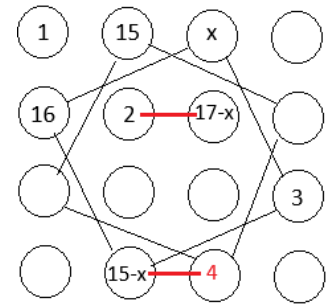


En complétant les cases en fonction de x , nous obtenons :

Or, $b_2+b_3=d_2+d_3=19-x$ (car $19-x+c_2+c_3=34$)

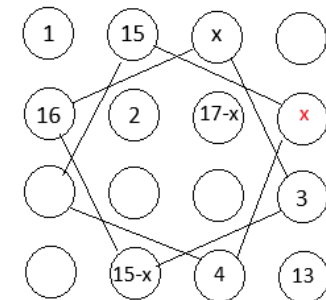
Nous en concluons que $d_3=4$

Dans le carré du bas à droite, nous devons donc placer les nombres 13 et 14.



En plaçant 13 en d_4 , nous aboutissons à une impossibilité :

$b_3+b_4=17$, or b_4 ne peut pas valoir x qui se trouve déjà en a_3



Plaçons 14 en d_4 et 13 en c_3 et complétons le tableau en fonction de x :

Il nous reste à placer les nombres de 5 à 12 sur les cases contenant :

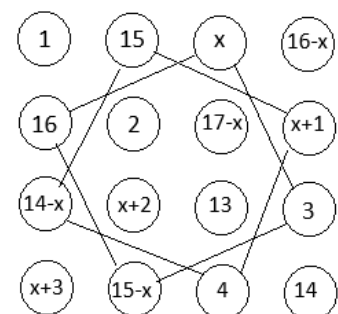
$x, x+1, x+2, x+3$ et $14-x, 15-x, 16-x$ et $17-x$

Cela peut être fait en prenant $x=5$ ou $x=9$

Il existe **2 solutions** :

Avec $x=5$, la dernière ligne contient **8, 10, 4, 14**.

Avec $x=9$, la dernière ligne contient **12, 6, 4, 14**.



15. Un drôle de cactus

Commençons par déterminer l'aire de chacun des petits carrés obtenus en fonction de l'aire du carré de la génération précédente.

Si x est le côté du carré de la génération précédente, le côté de la génération suivante vaut (théorème de Pythagore) :

$$y = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2}}$$

L'aire de chaque carré de la génération suivante est de $y^2 = \frac{x^2}{2}$

En partant d'une feuille de 16 dm^2

La 1^e année, deux carrés de 8 dm^2 sont créés. ($u_1=16$)

La 2^e année, deux carrés de 4 dm^2 sont créés. ($u_2=8$)

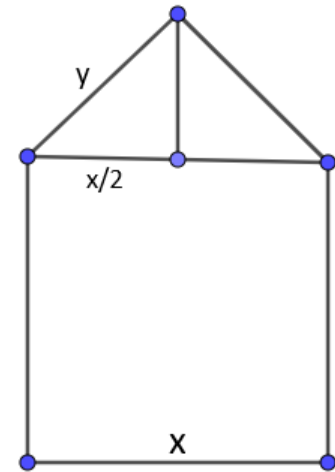
L'aire ajoutée chaque année suit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

L'aire totale vaut donc 16 (départ) + S_{16} (somme des 16 années ajoutées)

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison r est donnée par la formule $S_n = u_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

$$\text{Et donc ici } S_{16} = \frac{16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right)}{\frac{1}{2}} = 2^5 \left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) = 2^5 - \frac{1}{2^{11}} = 32 - \frac{1}{2048}$$

$$\text{L'aire totale vaut donc : } 16 + 32 - \frac{1}{2048} = \frac{98303}{2048}$$



16. Quadrilatère pianable

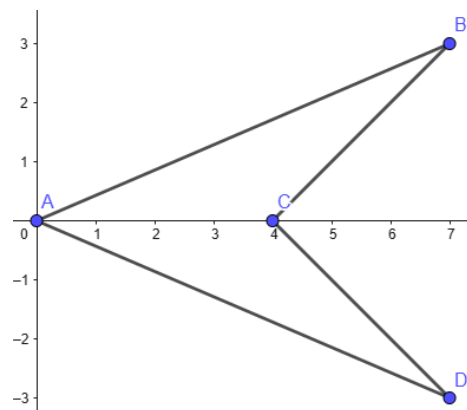
La difficulté principale de l'exercice est de comprendre la définition de pianable qui peut se reformuler ainsi :

Il faut trouver au moins un point du plan pour lequel la distance du point à chaque support de côté est proportionnelle à la longueur du côté.

Le quadrilatère proposé est le suivant :

Il est à relever que c'est un fer de lance, il est symétrique par rapport à l'axe Ox , les côtés AB et AD sont isométriques, de même que les côtés BC et CD .

Nous cherchons donc un point qui est à égale distance de AB et AD , il doit être sur la bissectrice de l'angle en A .



Pour la même raison, il doit appartenir à la bissectrice de l'angle en C.
Or ces deux bissectrices coïncident, il s'agit à chaque fois de la droite $y=0$.

Pour le reste, il suffit de calculer les distances d'un point $P(a,0)$ aux droites (AB) et (BC) et de vérifier la proportionnalité aux longueurs des côtés AB et BC grâce à la géométrie vectorielle.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

Equations des droites :

$$(AB) : 3x - 7y = 0 \quad \delta(P, (AB)) = \frac{|3a-0|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}} = \frac{|3a|}{\sqrt{58}}$$

$$(BC) : x - y - 4 = 0 \quad \delta(P, (BC)) = \frac{|a-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|a-4|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Avec la proportionnalité, nous avons : } \frac{\delta(P, (AB))}{\sqrt{58}} = \frac{\delta(P, (BC))}{\sqrt{18}}$$

$$\text{Il faut résoudre cette équation : } \frac{|3a|}{58} = \frac{|a-4|}{6} \sim 18a = \pm 58(a-4)$$

Nous avons donc **2 solutions** :

$$\text{Avec +) : } -40a = -232 \text{ et donc } \mathbf{a = 5.8}$$

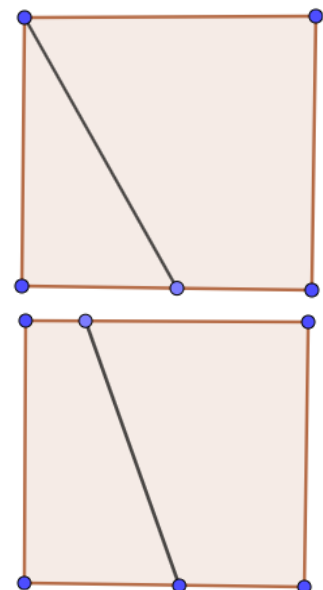
$$\text{Avec -) : } 76a = 232 \text{ et donc } \mathbf{a = 3.053}$$

Remarque : Si le point cherché doit se situer dans le quadrilatère, la première solution serait à éliminer.

17. Partage d'un carré

Il s'agit ici de maximiser la longueur d'un segment reliant deux côtés d'un carré pour former un polygone d'aire $\frac{1}{4}$. On peut le faire de 2 manières différentes :

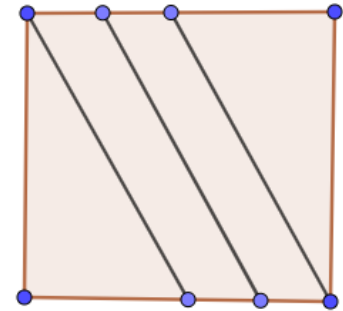
- 1) En reliant deux côtés consécutifs du carré, nous formons un triangle rectangle dont il faut maximiser l'hypoténuse pour l'aire de $\frac{1}{4}$. Cela se fait en prenant un côté de longueur 1 et un autre de longueur $\frac{1}{2}$
- 2) En reliant deux côtés opposés du carré, nous obtenons un trapèze rectangle, dont il faut maximiser la longueur du dernier côté. Cela se fait en maximisant la différence de longueur entre les deux bases, et donc la longueur maximale est obtenue avec des bases de 0 et $\frac{1}{2}$, comme dans le cas 1.



Vérifions finalement que l'on peut faire 4 parties de surface égale :

La longueur du segment est donc

$$\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



Avec la valeur donnée pour la racine de 5, nous obtenons **1.118 dm**

18. Le quadrilatère articulé

Les théorèmes isopérimétriques stipulent :

- Pour un périmètre donné, le polygone possédant l'aire maximale est le polygone régulier
- Lorsque les côtés sont de longueur différente, le polygone possédant l'aire maximale est le polygone inscritible dans un cercle.

Avec des côtés a , b , c et d , l'aire du polygone inscritible est donnée par la formule de Héron généralisée (formule de Brahmagupta) pour les quadrilatères :

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

où s est le demi-périmètre du quadrilatère
 Dans notre exemple ($s=5$, $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$)

$$A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Avec les approximations données, on obtient **4.90 dm²**