15e championnat des jeux mathématiques et logiques

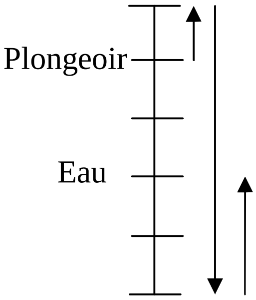
Qualification régionale valaisanne - 15 novembre 2000

Solutions

1. Les billes

Julien doit donner **<u>14 billes</u>** que l'on peut trouver en faisant $(44-16):2$.

2. Le plongeoir



Le croquis nous montre le trajet effectué par Albert. Le plongeoir est **<u>2 mètres</u>** au-dessus de l'eau.

3. Les buteurs

Faisons un tableau et recherchons la solution par essais successifs en commençant par supposer que Pierre n'a marqué qu'un seul but. Dans ce cas, Jean en a marqué 2 (le double de Pierre) et Luc 4 (le double de Jean).

Nombre de buts marqués par Pierre	1	2	3
Nombre de buts marqués par Jean	2	4	6
Nombre de buts marqués par Luc	4	8	12
Nombre total de buts marqués	7	14	21

Luc a marqué **<u>12 buts</u>**.

4. GVJM (CM, C1, C2)

En mettant la lettre G en première position, on peut faire 6 sigles différents : GVJM, GVMJ, GJVM, GJMV, GMVJ et GMJV. De la même manière, on peut faire 6 sigles différents avec chacune des trois autres lettres mises en première position. Ce qui nous fait un total de **<u>24 sigles</u>** différents.

5. L'âge de Louis

Deux mille correspond à 9 lettres.

Deux mille un → 11 lettres et une année. Etc.

Deux mille dix → 12 lettres et 10 ans.

Deux mille onze → 13 lettres et 11 ans.

Deux mille douze → 14 lettres et 12 ans.

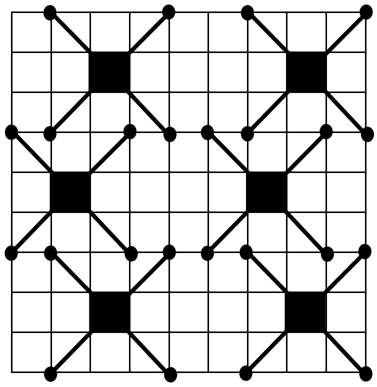
Deux mille treize → 15 lettres et 12 ans.

Deux mille quatorze → 17 lettres et 13 ans.

Deux mille quinze → 15 lettres et 15 ans. La solution est **<u>2015</u>**.

6. Les émetteurs

Evariste peut placer un maximum de **<u>6 émetteurs</u>**. Voici une disposition possible :



7. Les barrières

Il est évident que l'on peut obtenir les longueurs suivantes : 1, 2, 5, 6 et 10 m. Voici comment on obtient d'autres longueurs (une seule possibilité est donnée) :

3 = 1 + 2	7 = 2 + 5	8 = 1 + 2 + 5
9 = 1 + 2 + 6	11 = 1 + 10	12 = 2 + 10
13 = 1 + 2 + 10	14 = 1 + 2 + 5 + 6	15 = 5 + 10
16 = 6 + 10	17 = 1 + 6 + 10	18 = 2 + 6 + 10
19 = 1 + 2 + 6 + 10	21 = 5 + 6 + 10	22 = 1 + 5 + 6 + 10
23 = 2 + 5 + 6 + 10	24 = 1 + 2 + 5 + 6 + 10	

On ne peut pas obtenir **<u>4 et 20 mètres</u>**.

8. Les joueurs

Appelons x, le nombre total de joueurs. Ce nombre correspond au montant que le gagnant va recevoir de chacun des perdants car « le gagnant reçoit de la part de chacun des perdants autant d'argent qu'il y a de joueurs ». Le nombre de perdant est égal à x − 1. Il nous faut alors résoudre l'équation $x(x-1)=42$. Alors, x = 7 car $7 \cdot 6$ = 42. Il y a **<u>7 joueurs</u>**.

On peut aussi trouver la solution par tâtonnements.

S'il y a 2 joueurs, le vainqueur gagne 2 francs $(2 \cdot 1)$.

S'il y a 3 joueurs, le vainqueur gagne 6 francs $(3 \cdot 2)$.

S'il y a 4 joueurs, le vainqueur gagne 12 francs $(4 \cdot 3)$. Etc.

9. Les caramels

La première affirmation nous assure qu'il y a des caramels de trois couleurs différentes. En effet, si les caramels ne sont que de deux couleurs différentes, en en prenant trois, on aurait à coup sûr deux caramels de même couleur. Si les caramels sont de quatre couleurs différentes, il faudrait en prendre cinq pour être sûr d'en avoir deux de même couleur, etc.

On sait qu'il y a des caramels bleus et verts. Disons que la troisième couleur est le rouge. Soit b, le nombre de caramels bleus, v, le nombre de caramels verts et r, le nombre de caramels rouges.

La deuxième affirmation nous dit que le nombre maximum de caramels d'une même couleur est 11.

De la troisième affirmation, on tire que v + r = 8. En effet, après avoir tiré tous les caramels verts et rouges, en tirant 2 caramels supplémentaires, on est sûr d'avoir 2 caramels bleus.

De la dernière affirmation, on tire que b + r = 14.

Comme v + r = 8, on peut affirmer qu'il y a 11 caramels bleus (le nombre maximum de caramels d'une même couleur est 11). On sait que b + r = 14 = 11 + r, alors r = 3. Comme v + r = 8 = v + 3, alors v = 5.

Dans la boîte, il y a 11 caramels bleus, 3 caramels rouges et 5 caramels verts, soit **19 caramels** en tout.

10. Le ping-pong

Dans le tableau, A = Aline, B = Blandine et C = Céline. Les joueuses sont notées par un x et la gagnante par x̲. Supposons que Céline joue contre Blandine lors de la première partie. Selon la donnée, Céline gagne la première partie. Comme Aline gagne 8 parties, supposons que ce soit les parties 2 à 9 qu'elle gagne. A la 10ème partie, Aline doit jouer contre Céline et aucune des deux ne peut gagner. Nous sommes bloqués, le jeu n'a pas pu se dérouler ainsi.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A		x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x
B	x		x		x		x		x	
C	x̲	x		x		x		x		x

Commençons alors le jeu avec une partie entre Aline et Céline. Au 2ème jeu, Aline doit jouer contre Blandine. C'est forcément Blandine qui gagne. Supposons qu'elle gagne les parties 2 à 14, soit 13 parties. Ensuite, Aline gagne 8 parties (15 à 22). Dans ce cas, tout fonctionne et Aline a perdu **7 parties**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
A	x		x		x		x		x		x		x		x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲
B		x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x̲	x		x		x		x	
C	x̲	x		x		x		x		x		x		x		x		x		x		x

11. Les Justes et les Menteurs

Il y a 11 possibilités :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de Menteurs	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Nombre de Justes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Examinons le 1er cas : 10 Menteurs et 0 Juste. Alors, A, B, C, D, E, F, G, H et I sont menteurs et J dit la vérité. Cela fait 9 Menteurs et 1 Juste. Il y a contradiction avec l'hypothèse de départ. Ce cas n'est pas possible.

2ème cas : 9 menteurs et 1 Juste. Dans cette hypothèse, seul I dit la vérité. I est un Juste. Cela joue.

3ème cas : 8 menteurs et 2 Justes. Ici, seul H dit la vérité. Cela fait 9 menteurs et 1 Juste. Il y a contradiction avec l'hypothèse de départ. Ce cas est impossible.

4ème cas : 7 menteurs et 3 Justes. Ici, seul G dit la vérité. Cela fait toujours 9 menteurs et 1 Juste. Il y a contradiction avec l'hypothèse de départ. Ce cas est impossible.

De la même manière, il est facile de vérifier que tous les autres cas conduisent à des contradictions.

Seul **I est un Juste**.

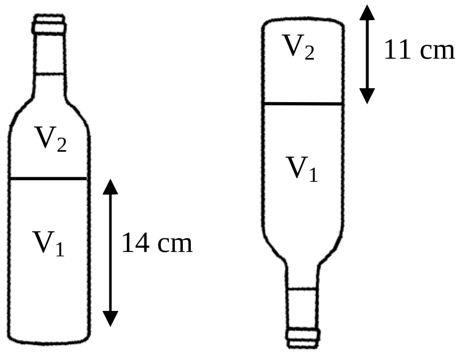
Il aurait été possible de trouver tout simplement la solution par le raisonnement suivant : comme chacun d'entre eux prétend quelque chose de différent, il ne peut y avoir qu'un seul Juste (I) et 9 Menteurs.

12. La bouteille

Soit V_1 = vin, V_2 = air et r = rayon du cylindre

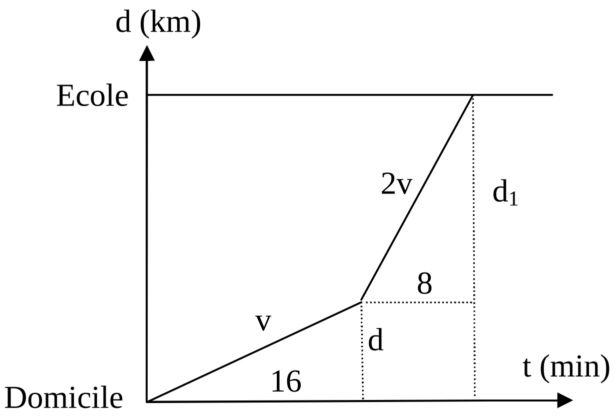
$V_1 + V_2$ = 1 litre $\Rightarrow \pi r^2 \cdot 14 + \pi r^2 \cdot 11 = 100$ cl $\Rightarrow 25 \pi r^2 = 100$ cl.

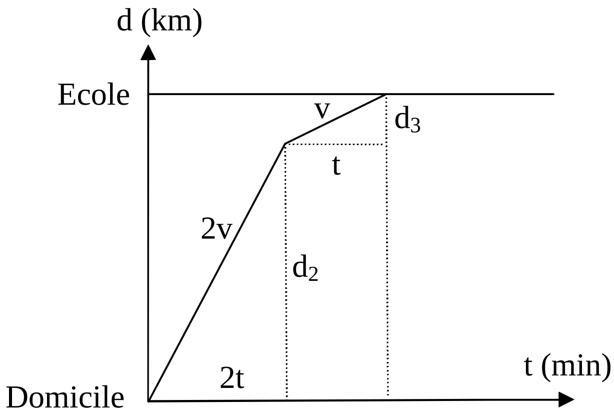
La quantité de vin restante est égale à $14 \pi r^2$. Comme $25 \pi r^2 = 100$ cl $\Rightarrow 14 \pi r^2 = \frac{14}{25} \cdot 100$ = **<u>56 cl</u>**.



13. Marche et course

Schématisons la situation :





On obtient les équations (1), (2) et (3) :

(1) $v = \frac{d}{16} = \frac{d_3}{t} \;\Rightarrow\; 2v = \frac{d}{8} = \frac{2d_3}{t}$ (4)

(2) $2v = \frac{d_1}{8} = \frac{d_2}{2t}$

(3) $d + d_1 = d_2 + d_3$

De (2) et (4), on a $d = d_1$ et $d_2 = 4d_3$. Alors, (3) devient $2d = 5d_3$, d'où $d = \frac{5d_3}{2}$.

L'équation (1) devient $\frac{5d_3}{32} = \frac{d_3}{t} \Rightarrow t = \frac{32}{5} = 6{,}4$. Alors 3t = 19,2 minutes = **<u>19 min 12 secondes</u>**.

On aurait peut-être pu se douter que $d = d_1$ car il court deux fois plus vite qu'il ne marche et il marche deux fois plus longtemps qu'il ne court.

14. L’éléphant et les bananes

Pour bien comprendre cette énigme, prenons un exemple plus simple. Supposons qu’il y ait 14 bananes au départ, que le marché est à 3 km et que l’éléphant ne puisse transporter que 5 bananes, au maximum.

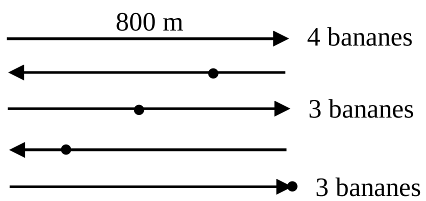
		km 0	km 1	km 2	km 3	A vendre
a	14 bananes	5	4	3	2	2
b	14 bananes Reste : 9	5 5	4 4	3 (2) 3 (3)		4

Les bananes stockées sont mises entre parenthèses.

Cas a : l’éléphant part avec 5 bananes et va tout droit au marché. Il va lui rester 4 bananes au km 1, 3 bananes au km 2, 2 bananes au km 3, donc 2 bananes à vendre. Si l’éléphant revenait au départ, il aurait besoin de 2 bananes pour le retour, donc il n’en pourrait laisser aucune au marché. Dans cette façon de procéder, 9 bananes ont été laissées au départ.

Cas b : l’éléphant décide de stocker des bananes au km 2. Au premier voyage, il peut en stocker 2 car il doit prévoir en manger 1 au retour, au km 1. Il doit aussi en manger une au km 0, prise dans les bananes restées au départ. Il lui reste 9 bananes pour le second voyage. Il part avec 5 et en stocke 3 au km 2. S’il voulait revenir, il ne pourrait en stocker que 2 et il lui resterait 3 bananes pour un 3ème voyage, ce qui lui permettrait d’en stocker 1 au km 2, soit un total de 3 bananes stockées en tout. Il n’a donc aucun intérêt à revenir. Il a maintenant 5 bananes au km 2. Il les amène au km 3, en mange 1 et en laisse 4 pour la vente. 3 bananes ont été abandonnées au départ.

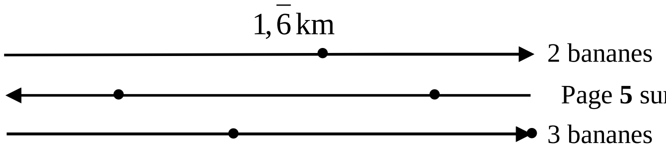
Ces deux manières de faire nous montrent qu’il va falloir stocker des bananes en divers points du parcours et qu’il faut trouver une stratégie pour qu’aucune banane ne soit abandonnée en cours de route. Remarquons encore qu’à partir du moment où l’éléphant peut prendre toutes les bananes restantes, il n’y a pas lieu de faire des stocks intermédiaires car cela ne ferait que prolonger le chemin et donc augmenter la consommation de bananes. Voici cette stratégie :



L’idée de base est de déplacer toutes les bananes, en un minimum de trajets, sur une distance maximale. Comme on a 14 bananes et 5 transportables au maximum, alors, 14 : 5 = 2,8 $\Rightarrow$ il faut au moins 3 départs pour prendre toutes les bananes = 5 trajets entre les allers et retours. D’autre part, 14 : 5 = 2 avec un reste de 4. On va chercher à aller le plus loin possible en dépensant 4 bananes (le reste de la division précédente) en 5 trajets sans qu’il y ait la moindre perte. Les trajets doivent faire 0,8 km (4 : 5).
L’éléphant emporte 5 bananes et en dépose 4 au bout du 1er trajet car il doit en garder 1 pour le retour, après 200 m (les bananes mangées sont symbolisées par un point). Au départ, il reste 9 bananes (4 sont maintenant stockées et 1 mangée). L’éléphant repart avec 5 bananes. Il en mange 1 à l’aller, après 400 m et doit en garder 1 pour le retour. Il peut stocker 3 bananes. Au départ, il reste 4 bananes. L’éléphant les prend, en mange 1 au bout du trajet et en stocke 3. Il a réussi à stocker 10 bananes après 800 m. 4 bananes ont été consommées.

Avec cette stratégie (il y en a sûrement d’autres), le nombre de bananes stockées est par la suite toujours un multiple du nombre maximum de bananes transportables par l’éléphant.

Maintenant la tactique consiste à dépenser 5 bananes (nombre maximum de bananes transportables) sur un trajet qui sera défini par le nombre de bananes encore disponibles (ici 10). Comme 10 : 5 = 2 $\Rightarrow$ il faut 2 départs pour prendre les 10 bananes, soit 3 trajets. Il faut chercher à dépenser 5 bananes en 3 trajets. Les trajets doivent faire 5 : 3 = 1 km et 2/3 de km. Il restera 5 bananes après $2{,}4\overline{6}$ km (0,8 km + $1{,}\overline{6}$ km).



Les 5 dernières bananes seront transportées en 1 trajet. Comme il reste moins d'1 km, le planteur pourra mettre 5 bananes sur le marché.

Reprenons notre énigme. Comme 3900 : 1050 ≅ 3,7 ⇒ il faut au moins 4 départs pour prendre toutes les bananes, soit 7 trajets entre les allers et retours. D'autre part, 3900 : 1050 = 3, avec un reste de 750. Commençons par dépenser 750 bananes (le reste de la division de 3900 par 1050). 750 : 7 ≅ 107,143. Il faut environ 107,143 km pour dépenser 750 bananes. Il reste 3150 bananes que l'éléphant peut prendre en 3 départs, soit 5 trajets. Le but est de chercher à dépenser 1050 bananes sur les 5 trajets. Pour cela, il faut progresser de 210 km (1050 : 5). Il va rester 2100 bananes (3150 – 1050). Ces 2100 bananes nécessitent 2 départs, soit 3 trajets. Il faut dépenser 1050 bananes en 3 trajets, soit avancer de 350 km (1050 : 3). Il va rester 1050 bananes (2100 – 1050) que l'éléphant va transporter en un dernier trajet. Il reste 332,857 km (1000 – 107,143 – 210 – 350). Sur cette distance, l'éléphant va manger 332 bananes. Il restera **718 bananes** à mettre en vente au marché.

1er tronçon	2ème tronçon	3ème tronçon	4ème tronçon
3900 ban. disponibles	3150 ban. disp.	2100 ban. disp.	1050 ban. disp.
4 allers et 3 retours	3 allers et 2 retours	2 allers et 1 retour	1 aller
7 trajets	5 trajets	3 trajets	1 trajet
107,143 km (750 : 7)	210 km (1050 : 5)	350 km (1050 : 3)	332,857 km
750 ban. mangées	1050 ban. mangées	1050 ban. mangées	332 ban. mangées

Remarque : si, dans un tronçon, la distance à effectuer est supérieure à la distance restante pour aller au marché, il faut prendre comme longueur du tronçon, la distance restante pour aller au marché. C'est le cas par exemple, s'il faut transporter 19 bananes, en direction d'un marché distant de 3 km, en ne pouvant transporter qu'un maximum de 8 bananes. 19 : 8 = 2,375 = 2 avec un reste de 3. Il faut 3 allers et 2 retours, soit 5 trajets au début. Le premier tronçon vaut 0,6 km (3 : 5). Après ce tronçon, 16 bananes seront stockées. Il faudra faire 3 trajets, de $2,\overline{6}$ km. Sur ces $2,\overline{6}$ km, 8 bananes seront mangées et ainsi 8 bananes seront disponibles au marché. Mais ce n'est pas la bonne solution car il ne reste que 2,4 km à parcourir pour ce dernier tronçon, soit 7,2 km en tout, d'où une consommation de 7 bananes. Dans ce cas, 9 bananes seront disponibles au marché.