18e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne – 12 novembre 2003

Solutions

1. L'année

La somme des chiffres de 2005 = 7 = âge de Lucie.
La somme des chiffres de 2006 = 8 = âge de Lucie.
La somme des chiffres de 2007 = 9 = âge de Lucie.
La somme des chiffres de 2008 = 10 = âge de Lucie.
La somme des chiffres de 2009 = 11 = âge de Lucie.
La somme des chiffres de 2010 = 3 = ce n'est pas l'âge de Lucie.

Année cherchée : **2010**.

2. Le cube

La lettre opposée à F est la lettre **D**. Il suffit de construire le cube pour s'en convaincre.

3. Les bises

Soit F1, F2 et F3, les 3 femmes. Soit H1 et H2, les 2 hommes.
F1 fait des bises aux 4 autres personnes. Comme il y a chaque fois un échange de 6 bises, cela fait 24 bises. F1 est éliminé.
F2 fait des bises aux 3 personnes restantes. Cela fait 18 bises (3 fois 6 bises). F2 est éliminé.
F1 fait des bises aux 2 personnes restantes. Cela fait 12 bises (2 fois 6 bises). F1 est éliminé.
Au total, il y a donc **54 bises** (24 + 18 + 12).

4. Les jetons

Cela marche s'il y a un 3 au dos du 5 et un 8 au dos du 7. Cela marche aussi s'il y a un 6 au dos du 5 et un 5 au dos du 7. Dans les deux cas, la somme donne **23**.

5. Les cases noires

1		1		1	1	1	
2			1			1	
2		2	1	1	1	2	
1	1	1				1	

6. Les pommes

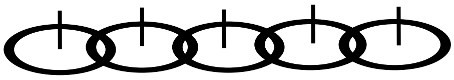
Dans la colonne F, on a le nombre de pommes prises par les filles. Cela fait 10 pommes. Il doit en rester 22 pour les garçons (32 – 10). Ces 22 pommes sont trouvées, par tâtonnement, en multipliant le 1 par 3, le 2 par 4, etc.

	F		G	
Anne	1	fois 3	3	Jean Mayoraz
Monique	2	fois 4	8	René Morisod
Carole	3	fois 1	3	Louis Héritier
Francine	4	fois 2	8	Jacques Epiney
Total	10		22	

Les noms de famille des filles sont **Anne Mayoraz**, **Monique Morisod**, **Carole Héritier** et **Francine Epiney**.

7. La Chaîne

Valentin ouvre les 5 maillons d'un seul bout d'une chaîne comme indiqué ci-contre. Il obtient ainsi 5 maillons indépendants. Il reste 5 bouts de chaînes qui peuvent être réunis avec les 5 maillons indépendants.



Temps minimum nécessaire : 5 fois 1' + 5 fois 3' = **20 minutes**.

8. Le CD des Mathlovers

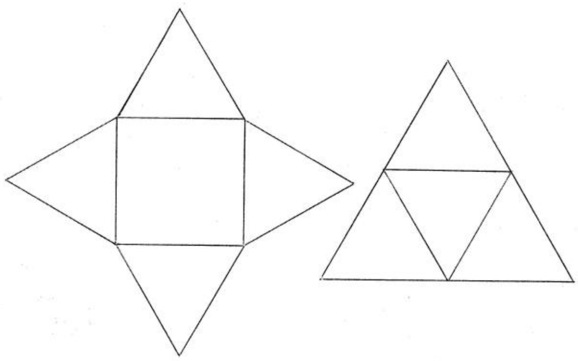
Le CD vaut plus de 30 fr. Il peut donc valoir 31fr. ou 32 fr. ou 33 fr. etc.
Si le CD vaut 31 francs, Marc a 1 franc et Julie 29 francs. Ils ont un total de 30 francs et ne peuvent pas s'offrir le CD.
Si le CD vaut 32 francs, Marc a 2 francs et Julie 30 francs. Ils ont un total de 32 francs et peuvent s'offrir le CD.
Si le CD vaut 33 francs, Marc a 3 francs et Julie 31 francs. Ils ont un total de 34 francs et peuvent s'offrir le CD.
On peut continuer le raisonnement à l'infini. Seul un prix de 31 francs ne permet pas à Marc et Julie de s'offrir le CD. Le CD vaut donc **31 francs**.

Prix du CD	Marc	Julie	Total
31	1	29	30
32	2	30	32
33	3	31	34
34	4	32	36

9. Les pyramides

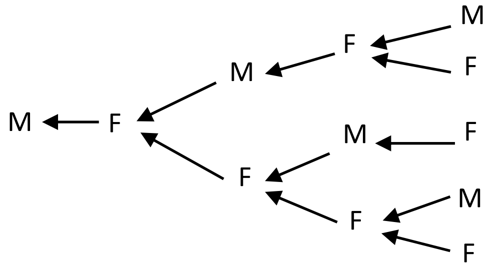
Le plus simple est de construire les deux polyèdres et de les coller ensemble. La réunion des deux pyramides donne un prisme dont une face est carrée, deux faces sont des triangles et les deux dernières faces sont des losanges. Il y a donc **5 faces** en tout.

Voici ci-contre un développement possible de ces deux polyèdres.



10. Les faux bourdons

Le faux bourdon est un mâle (M) qui a une « mère » (F) et pas de « père ». Une femelle est « fille » d'un mâle et d'une femelle. Le début de l'arbre des « ancêtres » d'un faux bourdon est donné ci-contre.



On peut aisément continuer cet arbre et compléter le tableau ci-dessous où notre faux bourdon est considéré de la génération zéro.

Générations	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'individus	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

La 11ème génération comptait **144 individus**.

On remarque qu'à partir de la 2ème génération, le nombre d'individus est la somme des individus des deux générations précédentes. Une telle suite s'appelle une suite de Fibonacci.

11. Le six bouge

On cherche le plus petit nombre tel que CBA6 multiplié par 4 = 6CBA. On ne sait pas combien de chiffres comporte ce nombre. Ci-après, les indices ne sont là que pour différencier les chiffres du nombre initial de ceux du produit.

$\ldots G_2F_2E_2D_2C_2B_2A_26$

$\cdot\, 4$

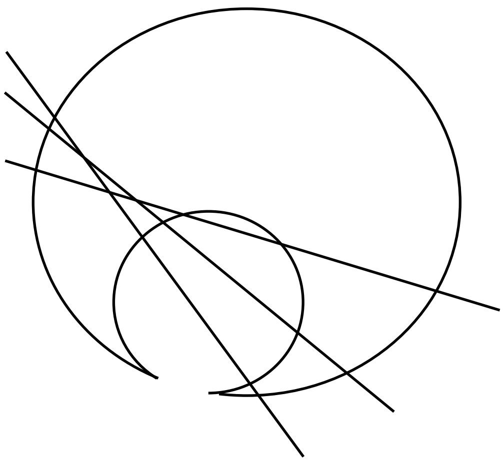
$\ldots 6G_1F_1E_1D_1C_1B_1A_1$

$6 \cdot 4 = 24$, alors $A_1 = \mathbf{4} = A_2$, avec 2 de retenues. $4 \cdot A_2 = 4 \cdot 4 = 16$. Avec les 2 de retenue, on a $B_1 = \mathbf{8} = B_2$, avec 1 de retenue. $4 \cdot B_2 = 4 \cdot 8 = 32$. Avec 1 de retenue, on a $C_1 = \mathbf{3} = C_2$, avec 3 de retenue. $4 \cdot C_2 = 4 \cdot 3 = 12$. Avec 3 de retenue, on a $D_1 = \mathbf{5} = D_2$, avec 1 de retenue. $4 \cdot D_2 = 4 \cdot 5 = 20$. Avec 1 de retenue, on a $E_1 = \mathbf{1} = E_2$, avec 2 de retenue. $4 \cdot E_2 = 4 \cdot 1 = 4$. Avec 2 de retenue, on a $F_1 = \mathbf{6} = F_2$, avec 0 de retenue. Pas de retenue et le 6 devant, nous avons terminé.

Le nombre initial est **153'846**. On a bien 153'846 · 4 = 615'384.

12. La lune

Les nombres de morceaux peuvent être trouvés par construction lorsqu'il n'y a pas trop de lignes. Dans l'exemple ci-contre, il y a 10 morceaux pour 3 lignes.



Une fois complété le début du tableau ci-après, la suite est relativement aisée : 3 + 3 = 6 ; 6 + 4 = 10 ; 10 + 5 = 15 ; 15 + 6 = 21 ; 21+ 7 = 28, etc. Ce qui donne 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, etc. La fonction liant le nombre de lignes au nombre de morceaux est moins évidente à trouver mais elle n'est pas nécessaire dans notre cas.

Nombre de lignes	1	2	3	4	5	x
Nombre de morceaux	3	6	10	15	21	$\frac{x^2+3x}{2}+1$

Avec 10 lignes on peut faire **66 morceaux**.

13. Les bises

Cette énigme ressemble à l'énigme numéro 3.
Soit x = nombre d'hommes et y = nombre de femmes
Premier cas : les femmes n'embrassent que les hommes, cela fait yx embrassades, soit 6yx bises (à chaque embrassade, il y a 6 bises).

Second cas : les femmes s'embrassent entre elles, cela fait $\frac{y\,(y-1)}{2}$ embrassades, soit $3y\,(y-1)$ bises.

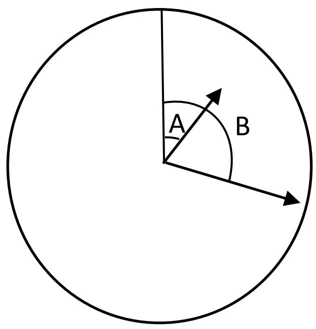
On a donc l'équation suivante : $6yx + 3y\,(y-1) = 5658 = 3\left(y^2 + 2xy - y\right) \Rightarrow y^2 + 2xy - y = 1886 = y\,(y + 2x - 1)$.
Or, $1886 = 2 \cdot 23 \cdot 41 = 1 \cdot 1886 = 2 \cdot 943 = 23 \cdot 82 = 41 \cdot 46$.
Comme y et x doivent être supérieurs à 5, il nous faut étudier les 6 cas suivants :

1. $y\,(y + 2x - 1) = 1886 \cdot 1 \Rightarrow$ x = impossible dans N
2. $y\,(y + 2x - 1) = 943 \cdot 2 \Rightarrow$ x = impossible dans N
3. $y\,(y + 2x - 1) = 23 \cdot 82 \Rightarrow x = 30$
4. $y\,(y + 2x - 1) = 82 \cdot 23 \Rightarrow$ x = impossible dans N
5. $y\,(y + 2x - 1) = 41 \cdot 46 \Rightarrow x = 3$, impossible (n'est pas supérieur à 5)
6. $y\,(y + 2x - 1) = 46 \cdot 41 \Rightarrow$ x = impossible dans N

Seul le cas y = 23 et x = 30 joue. Il y avait donc **53 personnes**.

14. La montre

Ce problème fut, paraît-il, posé à Albert Einstein qui ne mit que quelques secondes pour donner la bonne réponse !



Soit A, l'angle formé par l'aiguille des heures avec l'axe vertical et B, l'angle formé par l'aiguille des minutes avec le même axe. En démarrant à midi, les angles A et B sont liés par l'équation suivante : $\boxed{B + 360n = 12A}$ où n = nombre de tours (le coefficient de A est 12 car l'aiguille B se déplace 12 fois plus vite que l'aiguille A) et n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11. Lorsque l'on inverse la position des aiguilles, la relation devient $\boxed{A + 360n = 12B}$.

Il y a ainsi 12 équations du type B + 360n = 12 et 12 équations du type A + 360n = 12B. Les 12 équations du type B + 360n = 12A doivent être résolues avec les 12 équations du type A + 360n = 12B. Cela fait 144 équations. Cependant, le système B = 12A et A = 12B (n = 0) a la même solution (A = B = 0°) que le système B + 3960 = 12A et A + 3960 = 12B (n = 11), (A = B = 360°). Cela semble normal, dans le 1er cas, c'est 0 heure et dans le second, c'est 12 heures. Il nous faut donc enlever une solution. On va donc avoir **143** cas répondant à la question posée.

L’équation $B = 12A$ ($n = 0$) liée avec chacune des 12 équations $A + 360n = 12B$ donnera 12 solutions comprises entre 0 et 1 heure. L’équation $B + 360n = 12A$ liée avec chacune des 12 équations $A + 360n = 12B$ donnera 12 solutions comprises entre 1 et 2 heures, etc.

Exemple : avec $n = 2$ pour la première équation, on a $B + 720 = 12A$; avec $n = 5$ dans la seconde, on obtient $A + 1800 = 12B$. La résolution de ce système donne $A \cong 73°$ et $B \cong 156°$. A représente l’angle formée par les heures, donc A = 360° en 12 h ou 720’, alors 73° = 146’ ou 2 h 26’. B représente l’angle formée par les minutes, donc B = 360° en 1 h ou 60’, alors 156° = 26’. A environ 2 h 26’, les deux aiguilles occupent une position telle que leur interversion donne une position où l’heure est possible.