

21e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne – 15 novembre 2006

Solutions

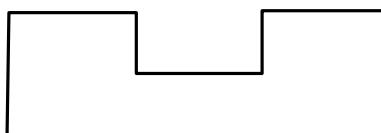
1. Les cases

1	2
3	4

ou

1	3
2	4

2. Le chemin



ou



3. Les lianes

Nombre de lianes de 7m	1	2	3	4	5
Distances parcourues avec les lianes de 7m (m)	7	14	21	28	35
Distances restantes à parcourir	34	27	20	13	6

Seule la distance restante de 20 m peut être atteinte avec des lianes de 4 m. Samuel a besoin de 3 lianes de 7 m et de 5 lianes de 4 m pour atteindre la pierre. Il doit utiliser **8 lianes**.

4. Les cailloux

Au total, il y a 24 cailloux. A la fin, il doit y avoir 6 cailloux par boîte. Les boîtes ont été numérotées de A à D, en allant de gauche à droite. Le tableau suivant montre les échanges pour obtenir 6 cailloux par boîte. Ce n'est pas la seule manière d'échanger les cailloux. Il faut un minimum de **8 coups**.

	Départ	1	2	3	4	5	6	7	8
Boîte A	1	2	3	4	5	6	6	6	6
Boîte B	9	8	7	6	5	4	5	6	6
Boîte C	9	9	9	9	9	9	8	7	6
Boîte D	5	5	5	5	5	5	5	5	6

5. La baignoire

En 10 minutes, on pourrait remplir 2 baignoires et vider 1 baignoire. Il faut donc **10 minutes** pour en remplir une avec la vidange ouverte.

6. Les timbres

Dans la première colonne du tableau, on met ce que possède Laura à la fin des échanges: 51 timbres italiens et 0 timbre suisse. Avant cette étape, elle possédait 46 timbres italiens et 3 timbres suisses. On continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait un total de 45 timbres. A ce moment-là, Laura avait **9 timbres suisses**.

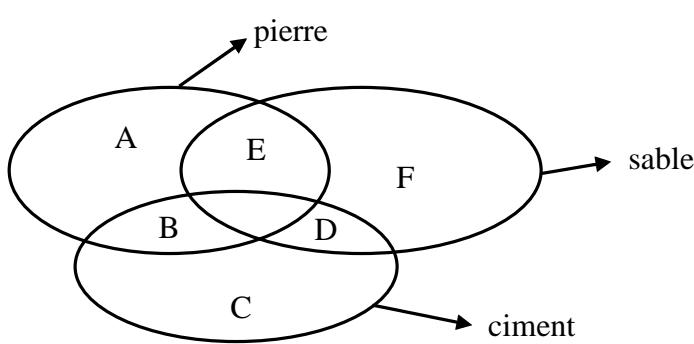
Nombre de timbres italiens	51	46	41	36
Nombre de timbres suisses	0	3	6	9
Nombre total de timbres	51	49	47	45

7. Les cases

Les nombres 1 à 9 occupent 9 cases. Les nombres 10 à 99 occupent 180 cases (90 fois 2). Il reste 1817 cases ($2006 - 9 - 180$) qui devront être occupées par des nombres à 3 chiffres. 1817 divisé par 3 = 605 avec 2 comme reste. $99 + 605 = 704$. Le 4 de 704 occupe la case 2004. C'est un **7** qui occupera la case 2005 et un **0** qui occupera la case 2006.

8. Le vendeur

Faisons le schéma suivant où il n'y a aucun élément faisant partie des trois ensembles. On a les quatre égalités suivantes :



$$A + B + C + D + E + F = 19 \quad (1)$$

$$A + B + E = 17 \quad (2)$$

$$E + F + D = 13 \quad (3)$$

$$B + D + C = 8 \quad (4)$$

En soustrayant (2) de (1), on obtient $C + D + F = 2 \quad (5)$

Dans le tableau ci-dessous, mettons d'abord les six cas possible concernant les valeurs de C, D et F, d'après l'égalité (5).

Grâce à l'égalité (3), on peut ensuite compléter la colonne E. Grâce à l'égalité (4), on peut ensuite compléter la colonne B. Et enfin, si possible, remplir la colonne A grâce à l'égalité (2).

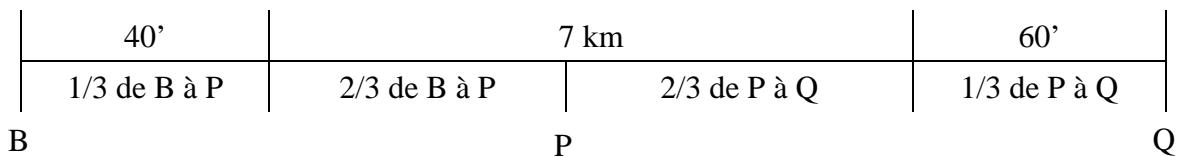
Seule la ligne où $A = 0$ est possible.

On peut conclure que **2 personnes** (D) ont acheté à la fois du sable et du ciment.

C	D	F	E	B	A
2	0	0	13	6	impossible
0	2	0	11	6	0
0	0	2	11	8	impossible
1	1	0	12	6	impossible
1	0	1	12	7	impossible
0	1	1	11	7	impossible

9. La mule

Illustrons la situation par le croquis suivant :



$1/3 \text{ de } B \text{ à } P = 40'$, alors $2/3 \text{ de } B \text{ à } P = 80'$. $1/3 \text{ de } P \text{ à } Q = 60'$, alors $2/3 \text{ de } B \text{ à } P = 120'$

$7 \text{ km} = 80' + 120' = 200'$. Temps de $B \text{ à } Q = 40' + 200' + 60' = 300'$.

$200' = 7 \text{ km}$, alors $300' = \underline{\underline{10,5 \text{ km}}}$

Remarque : les données $40'$ et $60'$ sont superflues mais le problème serait plus difficile à résoudre

$$(x + y = 7 \text{ km}, \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 3,5 \text{ km})$$

10. Les lunes

Il est possible de dessiner les cercles puis de les diviser respectivement par 5 et 6...

On peut aussi calculer l'angle formé par TE et TM :

1 jour : $1/5$ de $360^\circ + 1/6$ de $360^\circ = 132^\circ$.

2 jours : $2/5$ de $360^\circ + 2/6$ de $360^\circ = 264^\circ$.

31 jours : $31/5$ de $360^\circ + 31/6$ de $360^\circ = 4092^\circ$.

Il y a une éclipse tous les 360° , alors $4092 : 360 = 11,36\dots$ donc **11 éclipses**.

11. Le nombre au carré

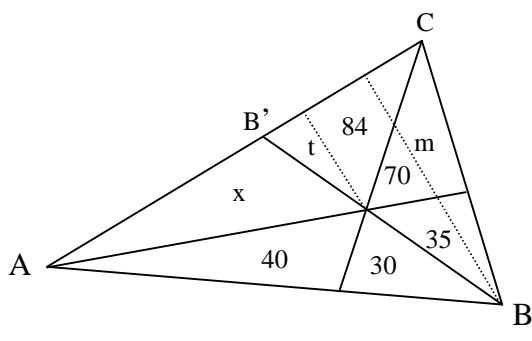
Le nombre donné comporte 17 chiffres. Or, $100'000'000^2 = (10^8)^2 = 10^{16}$ qui est un nombre de 17 chiffres. Le nombre cherché est donc légèrement supérieur à $100'000'000$ et se termine soit par 9, soit par 1. Le fait que $11^2 = 121$ peut nous mettre sur la piste, de même que $111^2 = 12321$.

Solution : **111'111'111**

12. Les triangles

Soit x , l'aire du petit triangle dont l'aire est manquante et t , une de ses hauteurs.

Soit m , la hauteur issue de B. On a alors :



$$x = B'A \cdot \frac{t}{2} \quad (1)$$

$$84 = B'C \cdot \frac{t}{2} \quad (2)$$

$$x + 40 + 30 = B'A \cdot \frac{m}{2} = x + 70 \quad (3)$$

$$84 + 70 + 35 = B'C \cdot \frac{m}{2} = 189 \quad (4)$$

De (1) et (2), on obtient $\frac{x}{84} = \frac{B'A}{B'C}$ (5). De (3) et (4), on obtient $\frac{x+70}{189} = \frac{B'A}{B'C}$ (6).

de (5) et (6), on tire que $\frac{x}{84} = \frac{x+70}{189} \Rightarrow 189x = 84x + 5880 \Rightarrow x = 56 \text{ cm}^2$

Aire totale : $56 + 40 + 30 + 35 + 70 + 84 = \underline{\underline{315 \text{ cm}^2}}$.

13. Le motard

Considérons le peloton comme un segment AB de 99 m de long qui se déplace parallèlement à l'ordonnée. B représente l'avant du peloton et A l'arrière.

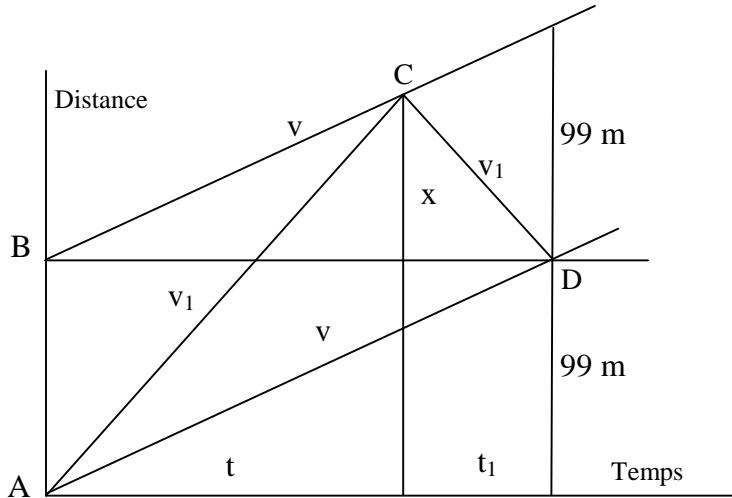
v = vitesse du peloton et v_1 = vitesse de la moto (elle fait demi-tour au point C et va ensuite vers D)

Selon le croquis qui suit, on tire les équations suivantes:

$$\text{a) } v = \frac{x}{t} \quad \text{b) } v = \frac{99}{t+t_1} \quad \text{c) } v_1 = \frac{x+99}{t} \quad \text{d) } v_1 = \frac{x}{t_1} \quad \text{e) } d = 2x + 99$$

De a et b, on obtient $\frac{x}{t} = \frac{99}{t+t_1}$. De c, on tire $t = \frac{x+99}{v_1}$. De d, on obtient $t_1 = \frac{x}{v_1}$.

$$\Rightarrow \frac{x}{x+99} = \frac{99}{x+99 + x} \Rightarrow \frac{x}{x+99} = \frac{99}{2x+99} \Rightarrow 2x^2 + 99x = 99x + 9801 \Rightarrow 2x^2 = 9801 \Rightarrow x^2 = 4900,5 \Rightarrow x \approx 70 \Rightarrow d = 2x + 99 = \underline{\underline{239 \text{ m}}}$$



14. Le concours

Cherchons le nombre de résultats différents pour un concours portant successivement 1 seule question, puis 2, puis 3, etc.

1 question \Rightarrow 2 résultats : 00 et 11

2 questions \Rightarrow 4 résultats : 00, 11, 12, 23

3 questions \Rightarrow 8 résultats : 00, 11, 12, 13, 23, 24, 25, 36

4 questions \Rightarrow 15 résultats : 00, 11, 12, 13, 14, 23, 24, 25, 26, 27, 36, 37, 38, 39, 40

5 questions \Rightarrow 26 résultats

6 questions \Rightarrow 42 résultats

7 questions \Rightarrow 64 résultats

La difficulté consiste à vérifier si un résultat ne peut pas être interprété de plusieurs manières. 784 signifie 7 questions justes et une somme de coefficients valant 84. 784 ne peut pas signifier 78 questions justes et 4 comme somme des coefficients. En fait, et jusqu'à la preuve du contraire, aucun résultat ne peut être interprété de plusieurs manières.

Il faut donc chercher la fonction qui lie le nombre de résultats au nombre de questions. La connaissance de la méthode dite d'intégration (on peut la trouver dans le livre « Les Clefs des Enigmes Mathématiques », d'Augustin Genoud, dans la solution de l'éénigme A7, à la page 125) permet de trouver cette fonction qui est du type $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$f(1) = a + b + c + d = 2$$

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 4$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 8$$

$$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 15$$

De ce système de 4 équations à 4 inconnues, on peut tirer que $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1$.

Alors, $f(100) = \underline{\underline{166751}}$.