25e championnat des jeux mathématiques et logiques

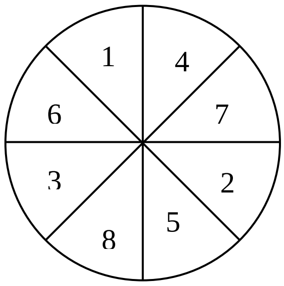
Qualification régionale valaisanne – 18 novembre 2009

Solutions

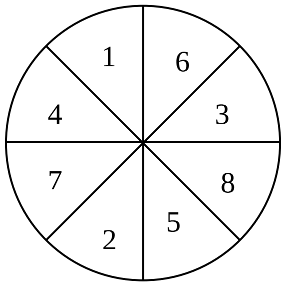
1. Les cubes

3 marches → 6 cubes, 4 marches → 10 cubes, 5 marches → **<u>15 cubes</u>**.

2. Les cases



ou



3. Les pièces

Nombre de pièces nécessaires pour faire un carré : 16 (4 · 4), 25 (5.·.5), 36 (6 · 6), 49 (7 · 7).
Nombre de pièces nécessaires pour faire un triangles : 15, 21, 28, 36, 45.
Le seul nombre qui convient dans les deux cas est 36. Dany possède **<u>36 pièces</u>**.

4. Les crayons

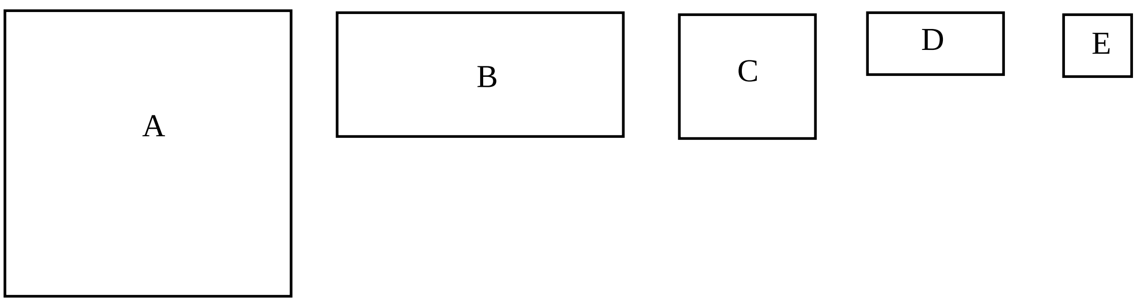
Quelques essais nous montrent que Vincent avait prêté **<u>40 crayons</u>**.

Nombre de crayons prêtés	60	50	40
Nombre de crayons rendus	6	5	4
Nombre de crayons en moins	54 (60 – 6)	45 (50 – 5)	36 (40 – 4)

5. La nappe

La grande nappe carrée (A) est devenue un rectangle (B) puis un carré (C) puis un rectangle (D) puis un carré (E) de 24 cm de côté.

Le rectangle D fait 48 cm par 24 cm. Le carré C a 48 cm de côté. Le rectangle B fait 96 cm par 48 cm et le carré A a 96 cm de côté, d'où un périmètre de **<u>384 cm</u>** (96 · 4).



6. La baignoire

Le tableau suivant nous montre l'évolution de la quantité d'eau dans la baignoire :

Temps (min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	**21**
Quantité d'eau ajoutée (l)	12	0	12	0	12	0	12	0	12	0	…	12
Quantité d'eau perdue (l)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	…	2
Quantité restante (l)	10	8	18	16	26	24	34	32	42	40	…	90

Il faut **21 minutes** pour remplir la baignoire.

7. L'animal

Ligne 4 : les lettres P, A, O, N et S peuvent être tracées.
Ligne 6 : les lettres C, H, I et E appartiennent à l'animal cherché.
Ligne 1 : la lettre T peut être tracée.
Ligne 2 : le I est forcément bien placé et le L doit être enlevé.
Ligne 3 : Le I et le E sont bien placés.
Ligne 5 : le E est mal placé, donc le B est bien placé.
L'animal cherché est **BICHE**.

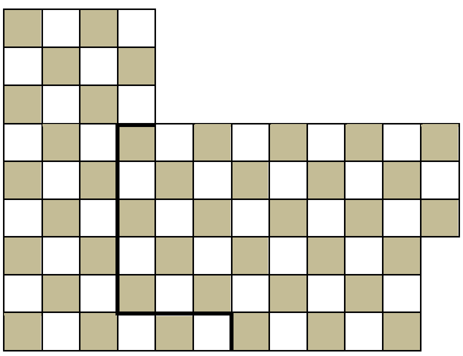
8. Le cahier

De 10 à 99 pages, il faut 2 chiffres pour numéroter chaque page. De 10 à 99, il y a 90 pages, soit 180 chiffres. Cela nous permet de dire qu'à la page 99, 189 (9 + 180) chiffres ont été utilisés. A partir de 100 pages, il faut ajouter 3 chiffres à chaque nouvelle page.

Nombre de chiffres	1	9	189	192	195	198	201	204	207	210	213	216
Nombre de pages	1	9	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108

Ce cahier a **108 pages**.

9. Le damier



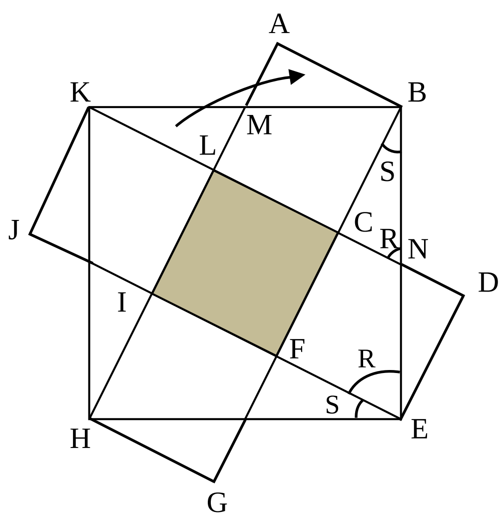
Chacun peut découper la figure à l'endroit indiqué pour vérifier que la solution donnée est juste.

10. La dalle

L'aire du polygone ABCDEFGHIJKL (croix formée de 5 carrés identiques) = aire du jardin = 144 m^2 (12^2).

L'aire de la dalle = 1/5 de l'aire du jardin = **28,8 m^2**.

Même si cela semble évident, il aurait fallu prouver que la dalle est carrée. La somme des angles S et R de sommet E est égale à



90°. L'angle R du triangle BCN est égal à l'angle R de sommet E (par translation). L'angle S du triangle BCN est égal à l'angle S de sommet E (Les triangles BFE et HIE sont isométriques. Alors, l'angle de sommet C est égal à 90°. On peut faire le même raisonnement pour les autres angles de la dalle. Les côtés de la dalle, par symétrie de construction ont la même mesure. La dalle est bien carrée.

11. Les sportifs

Il y a 8 élèves qui ne savent pas jouer au basket (148 – 140).
Il y a 33 élèves qui ne savent pas skier (148 – 115).
Il y a 16 élèves qui ne savent pas nager (148 – 132).
Il y a 50 élèves qui ne savent pas patiner (148 – 98).
Supposons que l'on ait donné un numéro différent à chaque élève (de 1 à 148). Les 8 premiers ne savent pas jouer au basket, les 33 suivant ne savent pas skier, les 16 suivants ne savent pas nager et les 50 suivants ne savent pas patiner.
Tous les autres, soit **41 élèves** (148 –8 – 33 – 50 = 41), au moins, sont capables de pratiquer les quatre sports mentionnés.

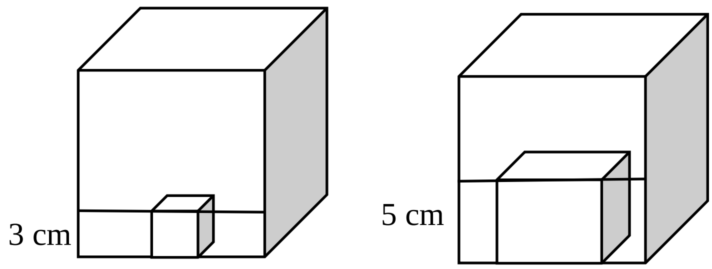
12. Le cube

Soit x le côté de l'aquarium cubique

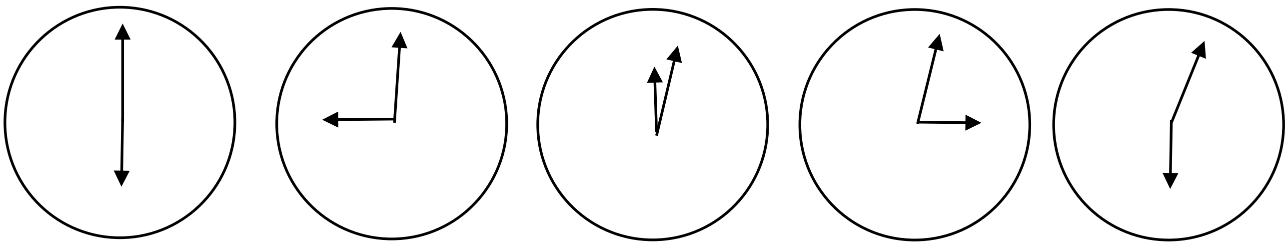
Equation : $3x^2 – 3^2 = 5x^2 – 5^3$.

$\Rightarrow 2x^2 = 98 \Rightarrow x = 7$.

Le cube a une arrête de **7 cm**.



13. L'horloge



6 h | 6 h 15 | 6 h 30 | 6 h 45 | 7 h

De gauche à droite, on a la position à 6 h puis à 6 h 15, etc. (la petite avance à la vitesse de l'aiguille des minutes et la grande à celle des heures).

Peu après 7 heures, l'horloge indiquera l'heure exacte pour la première fois, ce sera lorsque la petite aiguille aura effectué 1 tour de plus que la grande.

Distance parcourue par la grande aiguille (tours)	1	x/43200
Temps (secondes)	43200	x

Distance parcourue par la petite aiguille (tours)	1	x/3600
Temps (secondes)	3600	x

Equation : $\frac{x}{3600} = \frac{x}{43200} + 1 \Rightarrow 11x = 43200 \Rightarrow x\ 3927,\overline{27}$ secondes = 1 h 05' $\overline{27}$.

Heure cherchée = **7 h 05' 27''**.

14. Le tournoi

Voici un beau problème, pas facile à résoudre. Il aurait été possible de demander les scores de tous les matches, mais nous nous sommes restreints à réclamer uniquement les scores de l'équipe A, persuadés que quiconque les trouve sera capable de trouver tous les autres.

A – C étant connu, il reste neuf matches :

A – B = a – b	B – C = g – h	C – D = m – n
A – D = c – d	B – D = i – j	C – E = s – p
A – E = e – f	B – E = k – l	D – E = q – r

En tenant compte du fait que A a battu C par 3 à 2, on a :

Buts marqués par A = a + c + e = 3

Buts reçus par A = b + d + f = 5

Buts marqués par B = b + g + i + k = 4

Buts reçus par B = a + h + j + l = 6

Buts marqués par C = h + m + s = 6

Buts reçus par C = g + n + p = 1

Buts marqués par D = d + j + n + q = 4

Buts reçus par D = c + i + m + r = 6

Buts marqués par E = f + l + p + r = 6

Buts reçus par E = e + k + s + q = 5

La donnée nous montre qu'il y eut 28 buts en tout. Si on enlève le match entre A et C, les neuf autres rencontres comptent 23 buts.

Comme il n'y a pas eu de scores identiques, les scores possibles sont 0 – 0 ; 1 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 0 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 ; 3 – 1 ; 3 – 3 ; 4 – 0 ; 4 – 1 ; 4 – 2, etc. (tous ces scores peuvent être permutés). La somme des buts des neuf scores suivants est égale à 23 : 0 – 0 ; 1 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 0 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 ; 3 – 1 et 4 – 0. Ce sont forcément les scores cherchés car tout autre score (3 – 3 ; 4 – 1 ; 4 – 2 etc.) conduirait à une somme des buts dépassant 23.

Occupons-nous des trois matches de C. Ce choix est intéressant car la somme des buts reçus par C est égale à 1, ce qui restreint les scores possibles.

C – B = h – g ; C – D = m – n ; C – E = s – p.

Il faut que g + n + p = 1, que h + m + s = 6 et que C obtienne 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Alors, C – B ; C – D et C – E correspondent à 0 – 1 ; 4 – 0 et 2 – 0, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables.

Voyons maintenant les trois matches de A.

A – B = a – b et A – D = c – d et A – E = e – f.

Il faut que a + c + e = 3, que b + d + f = 5 et que A obtienne 2 points (1 victoire ou 2 matches nuls). Il ne reste que 6 scores permutables possibles : 0 – 0 ; 1 – 1 ; 2 – 1 ; 2 – 2 ; 3 – 0 et 3 – 1. Alors, A – B ; A – D et A – E correspondent à **2 – 2**, **1 – 3** et **0 – 0**, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables. Ces trois scores sont ceux demandés dans notre concours. Attention, le score 3 – 1 n'est pas accepté car la donnée précise qu'il faut d'abord indiquer les buts de A.

Allons plus loin en cherchant tous les résultats.

Voyons les matches de B.

B – A = b – a = 2 – 2 ou 3 – 1 ou 0 – 0 (selon les scores possibles de A vus précédemment).

B – C = g – h = 1 – 0 ou 0 – 2 ou 0 – 4 (selon les scores possibles de C vus précédemment).

B – D = i – j et B – E = k – l.

Il faut que b + g + i + k = 4, que a + h + j + l = 6 et que B obtienne 4 points (2 victoires ou 1 victoire et 2 matches nuls). Alors B – A ; B – C ; B – D et B – E correspondent à 2 – 2 ; 1 – 0 ; 1 – 1 et 0 – 3, sans que l'on sache à qui sont attribués ces scores non permutables. Récapitulons à l'aide du tableau suivant.

C – B	0 – 1		A – B	2 – 2		B – A	2 – 2
C – D	4 – 0		A – D	1 – 3		B – C	1 – 0
C – E	2 – 0		A – E	0 – 0		B – D	1 – 1
						B – E	0 – 3

On peut déjà conclure que A – B = 2 – 2 et que B – C = 1 – 0. Inscrivons ces deux résultats ainsi que celui qui était connu dès le départ, dans le tableau final suivant.

Voyons les matches de D (les scores 2 – 2 et 1 – 0 ne peuvent plus être attribués à D).

D – A = d – c = 3 – 1 ou 0 – 0 (selon les scores possibles de A vus précédemment)

D – B = j – i = 1 – 1 ou 3 – 0 (selon les scores possibles de B vus précédemment)

D – C = m – n = 0 – 4 ou 0 – 2 (selon les scores possibles de C vus précédemment)

D – E = q – r = 2 – 1 ou 1 – 2 (seuls scores encore disponibles)

Il faut que d + j + n + q = 4, que c + i + m + r = 6 et que D obtienne 3 points par 1 victoire et 1 match nul car il n'y plus la possibilité de 3 matches nuls. Ces conditions nous conduisent aux résultats suivants :

D – A = 0 – 0

D – B = 3 – 0

D – C = 0 – 4

D – E = 1 – 2

On connaît maintenant 7 résultats sur 10. Le premier tableau nous permet de trouver aisément les 3 derniers résultats.

		Points				
		A	B	C	D	E
A – B	2 – 2	1	1			
A – C	3 – 2	2		0		
A – D	0 – 0	1			1	
A – E	1 – 3	0				2
B – C	1 – 0		2	0		
B – D	0 – 3		0		2	
B – E	1 – 1		1			1
C – D	4 – 0			2	0	
C – E	2 – 0			2		0
D – E	1 – 2				0	2
		4	4	4	3	5