27e championnat des jeux mathématiques et logiques

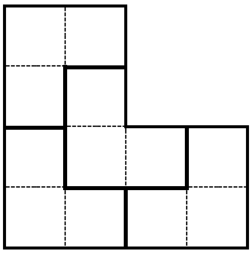
Qualification régionale valaisanne - 21 novembre 2012

Solutions

1. Le nombre

Le nombre cherché ne peut pas être 30 ni 40. Etant pair, il peut être 32, 34, 36 ou 38. Comme le chiffre des unités est plus petit que celui des dizaines, alors c'est **32**.

2. Le partage

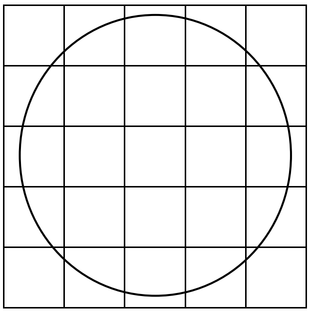


3. Les cachets

Si Christian prend le premier cachet au temps 0, il prendra le 2ème après 5 minutes, le 3ème après 10 minutes et le dernier après **15 minutes**.

4. Le cercle

On constate que le cercle traverse **16 cases**.



5. Les cavaliers

Quelques essais vont nous persuader que l'échange exigera un minimum de **8 sauts**.

6. La pièce

Le plus facile est de construire les 2 pièces en vraie grandeur et d'essayer. On verra alors que la pièce rectangulaire fera **3 tours** sur elle-même pour revenir à sa position de départ.

7. Le jeton

La somme des jetons donne 45. La somme des jetons restants après en avoir perdu 1 doit être multiple de 3 (trois groupes ayant la même somme) et de 4 (quatre groupes ayant la même somme).

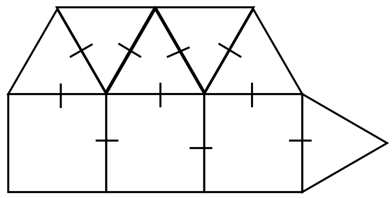
S'il perd le jeton 0, la somme donne 45. S'il perd le jeton 1, la somme donne 44, etc. La perte du **jeton 9** conduit à une somme de 36 qui est divisible par 3 et 4. C'est le seul cas qui joue.

Il nous faut quand même vérifier que les groupes sont possibles.

Trois groupes de somme 12 : 8 + 4 = 5 + 7 = 0 + 1 + 2 + 3 + 8 (il y a d'autres possibilités).

Quatre groupes de somme 9 : 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4 (une seule possibilité).

8. La mosaïque



Voici un exemple de mosaïque d'une longueur totale de joints qui représentent 1 mètre (= 10 joints). Le périmètre donne **<u>100 cm</u>**.

Si les pièces étaient totalement séparées, la somme de leur périmètre donnerait 300 cm (3 carrés de 40 cm et 6 triangles de 30 cm). Chaque joint fait diminuer le périmètre de 20 cm, soit 200 cm pour 10 joints. 300 200 = 100 cm !

9. La tache

Dans 8 ans, je serai 6 fois plus âgé qu'il y a 7 ans. On peut trouver par tâtonnement que cette affirmation n'est vraie que dans le cas où la personne a 10 ans. Ou alors, il faut résoudre l'équation $x + 8 = 6 (x - 7)$. Dans 12 ans, la personne aura 22 ans et sera 11 fois plus âgée qu'il y a 8 ans (elle avait 2 ans). Le nombre caché est **<u>11</u>**.

10. Les œufs

On peut résoudre ce problème par équation mais c'est encore plus simple de « remonter » les clients.

Après le 4ème client, son panier est vide. Avant de vendre ses derniers œufs au dernier client, Méryl en avait forcément 3 dans son panier car $3 - (3/2 + 1{,}5) = 0$.

Après le 3ème client, le panier de Méryl devait contenir 3 œufs. Avant la vente au 3ème client, le panier contenait 9 œufs car $9 - (9/2 + 1{,}5) = 3$.

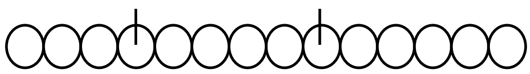
Après le 2ème client, le panier de Méryl devait contenir 9 œufs. Avant la vente au 2ème client, le panier contenait 21 œufs car $21 - (21/2 + 1{,}5) = 9$.

Après le 1er client, le panier de Méryl devait contenir 21 œufs. Avant la vente au 1er client, le panier contenait 45 œufs car $45 – (45/2 + 1{,}5) = 21$.

En arrivant au marché, Méryl avait **<u>45 œufs</u>**.

11. La chaîne

Supposons qu'Alain n'ouvre que 2 maillons qui ne sont pas aux extrémités de la chaîne, comme dans la figure suivante, avec une chaîne de 14 maillons. Il obtient 3 bouts de chaîne en plus des 2 maillons isolés.



Avec 2 maillons isolés (et pas aux extrémités) et 3 bouts de chaîne de longueurs respectives 3, 6 et 12 maillons, il peut réaliser toutes les longueurs de chaîne possible de 1 à 23 maillons : 1 ; 1 + 1 ; 3 ; 3 + 1 ; 3 + 1 + 1 ; 6 ; 6 + 1 ; 6 + 1 + 1 ; 6 + 3 ; 6 + 3 + 1 etc. La suite 1, 1, 3, 6, 12 est facile à construire, chaque nombre étant, à partir du 3ème, la somme des nombres précédents augmentée de 1.

Essayons d'ouvrir 3 maillons. On peut obtenir 4 bouts de chaîne supplémentaires de longueurs respectives 4, 8, 16 et 32 maillons. Or, 1 + 1 + 1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63. Avec ces 7 bouts de chaîne, on peut réaliser toutes les longueurs désirées de 1 à 63 maillons. Le plus grand bout compte **<u>32 maillons</u>**. Dans la pratique, on peut faire ainsi : laisser un bout de chaine de 4 maillons à un bout puis ouvrir un maillon puis laisser un bout de chaîne de 8 maillons puis ouvrir un maillon puis laisser un bout de chaîne de 16 maillons puis ouvrir un maillon et il va rester un bout de chaîne de 32 maillons.

12. Le matériel scolaire

Une gomme coûte 15/11 fr. Un crayon coûte 16/11 fr. Un stylo coûte 17/11 fr.

Soit x le nombre de gommes cherchées, y le nombre de crayons et z le nombre de stylos.

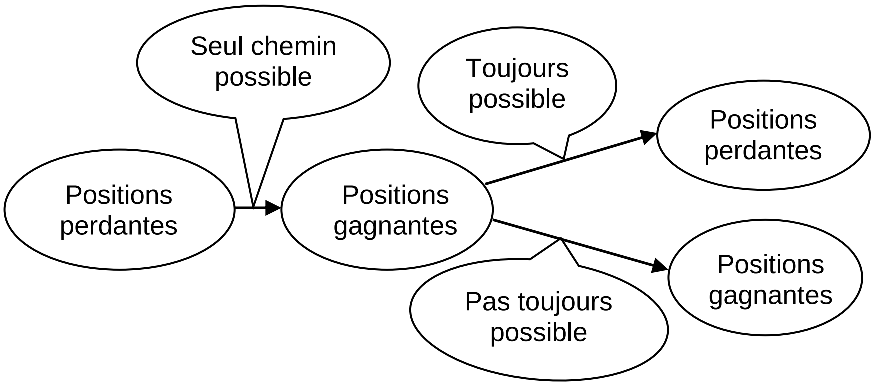
Equation : $\frac{15}{11}x+\frac{16}{11}y+\frac{17}{11}z=9$. D'où 15x + 16y + 17z = 99.

Comme on est sûr d'avoir au moins un objet de chaque sorte, on sait que l'on a déjà une dépense de 48 fr. Il reste 51 fr. Or, seul 17 · 3 = 51.

On peut acheter **1 gomme**, **1 crayon** et **4 stylos**.

13. La date

C'est un jeu de Nim (jeu qui se joue à deux et qui conduit à une fin certaine). Ceux qui connaissent ce type de jeu savent qu'il faut chercher les positions perdantes (P). Par convention, une position est dite perdante si celui qui doit jouer dans cette position ne peut que perdre. De même, une position est dite gagnante si celui qui doit jouer dans cette position peut gagner s'il joue correctement. Dans les jeux de Nim, il est impossible de passer en un coup d'une position perdante à une autre position perdante (une position perdante est toujours suivie d'une position gagnante). Une position gagnante peut toujours conduire en un coup à une position perdante et parfois à une position gagnante. Celui qui est dans une position gagnante doit amener son adversaire dans une position perdante. Celui qui est dans une position perdante n'a aucune chance de gagner si son adversaire joue bien. Il ne peut qu'espérer une erreur de son adversaire pour le mettre dans une position perdante. Si les deux joueurs connaissent les positions perdantes, le jeu n'a plus d'intérêt.



Revenons à notre problème. Les positions du 1er au 30 décembre ainsi que les 31 janvier, 31 mars, 31 mai, 31 juillet, 31 août et 31 octobre sont gagnantes. Celui qui se trouve dans une de ces positions va gagner car il peut annoncer 31 décembre au coup suivant.

La position 30 novembre est perdante car celui qui doit jouer dans cette position doit annoncer 30 décembre (position gagnante) et le prochain coup (31 décembre) va être gagnant. C'est la seule date qui conduit forcément à une des positions gagnantes énumérées au paragraphe précédent.

Les positions du 1er au 29 novembre ainsi que les 30 janvier, 30 mars, 30 avril, 30 mai, etc. jusqu'au 30 octobre sont gagnantes. Celui qui se trouve dans une de ces positions va gagner car il peut annoncer 30 novembre au coup suivant et mettre ainsi son adversaire dans une position perdante.

La position 29 octobre est perdante car celui qui doit jouer dans cette position doit annoncer 30 octobre ou 31 octobre ou 29 novembre ou 29 décembre, qui sont toutes des positions gagnantes. C'est la seule date qui conduit forcément à une des positions gagnantes vues jusqu'ici.

Les positions du 1er au 28 octobre ainsi que les 29 janvier, 29 février, 29 mars, 29 avril, 29 mai, etc. jusqu'au 29 septembre sont gagnantes. Celui qui se trouve dans une de ces positions va gagner car il peut annoncer 29 octobre au coup suivant et mettre ainsi son adversaire dans une position perdante.

La position 28 septembre est perdante car celui qui doit jouer dans cette position doit annoncer 29 ou 30 septembre ou 28 octobre ou 28 novembre ou 28 décembre, qui sont toutes des positions gagnantes. C'est la seule date qui conduit forcément à une des positions gagnantes vues jusqu'ici.

On continue le même raisonnement pour trouver toutes les positions perdantes. Les voici : 20 janvier, 21 février, 22 mars, 23 avril, 24 mai, 25 juin, 26 juillet, 27 août, 28 septembre, 29 octobre, 30 novembre et 31 décembre. Le premier joueur doit annoncer **20 janvier**.

La connaissance de ces 11 positions perdantes permet à celui qui commence le jeu de gagner à tous les coups. Un exemple :

Premier joueur : 20 janvier.
Second joueur : 20 mars (il n'a aucune possibilité de jouer une position perdante).
Premier joueur : 22 mars (la seule position perdante qu'il est possible de jouer lorsque l'adversaire annonce 20 mars).
Second joueur : 28 mars.
Premier joueur : 28 septembre (la seule position perdante qu'il est possible de jouer lorsque l'adversaire annonce 28 mars).
Second joueur : 28 octobre.
Premier joueur : 29 octobre.
Second joueur : 29 novembre.
Premier joueur : 30 novembre.
Second joueur : 30 décembre (seule possibilité)
Premier joueur : 31 décembre. Il a gagné.

14. La division

Appelons a, le nombre représentant le dividende, g le nombre le nombre représentant le diviseur et h celui du quotient.
Appelons b, c, d, e et f les nombres sous le dividende, de haut en bas, avec e = f.
Les deux derniers chiffres de c proviennent du dividende, cela signifie qu'il y a un 0 devant le 8 du diviseur. Les deux derniers chiffres de e proviennent aussi du dividende. Cela indique qu'il y a un 0 à l'avant-dernier chiffre du diviseur.
8 fois le diviseur est égal à d qui est un nombre de trois chiffres. Comme le diviseur est aussi formé de trois chiffres, alors le diviseur est compris entre 100 et 124, donc le premier chiffre de g est 1.

Le nombre f est constitué de quatre chiffres, alors le dernier chiffre de h est 9 car $8 \cdot g$ est un nombre de trois chiffres. Le premier chiffre de e ainsi que le premier chiffre de f sont 1.

On a maintenant la situation suivante :

```
a →  ·  ·  ·  ·  ·  ·  ·  ·  | 1  ·  ·       ← g
b →     ·  ·  ·              |--------------
                               ·  0  8  0  9 ← h
c →        ·  ·  ·  ·
d →           ·  ·  ·
e →              1  ·  ·  ·
f →              1  ·  ·  ·
```

On sait que $h \cdot g = a$ (nombre de huit chiffres). Seuls les quotients 80'809 et 90'809 multipliés par 124 (plus grand nombre possible de g) donnent des produits de huit chiffres. Alors, le premier chiffre de h est 8 ou 9. Comme 9 multiplié par g est un nombre de quatre chiffres selon f, tandis que b n'en possède que trois, alors le premier chiffre de h ne peut pas être 9. Par conséquent, le premier chiffre de h est 8 et h = 80'809.
80'809 multiplié par g n'est un nombre de huit chiffres que pour g = 124.
Le diviseur est donc **124**. La division donne 10'020'316 : 124 = 80'809.