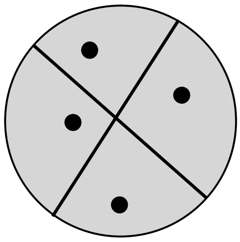
31e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne - 23 novembre 2016

Solutions

1. La tarte



2. Le code

Comme • = 2, ♦ = 0, ♥ = 1 et ♣ = 6, alors ♥ ♣ ♦ • représente **1602**.

3. Les âges

Alexandre est celui qui a le moins de prunes. Quelques essais nous montrent que 3 + 5 + 7 = 15.

Alexandre a **3 prunes**, Milos a 5 prunes et Vladimir en possède 7.

4. Les bâtonnets

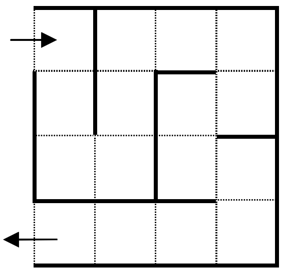
Chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de bâtonnets	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

Il est impossible d'écrire un nombre de deux chiffres avec seulement 15 bâtonnets. Le nombre cherché est donc supérieur à 99.

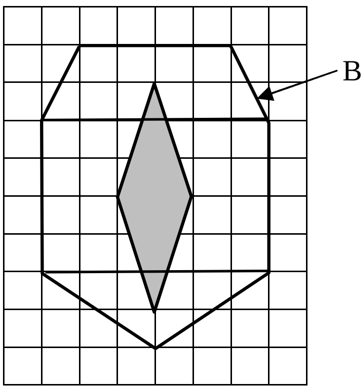
Les deux chiffres 1 et 0 comptent ensemble 8 bâtonnets. Pour arriver à 15, il faut encore 7 bâtonnets. Il n'y a qu'un seul chiffre qui compte 7 bâtonnets, c'est le chiffre 8. Alors, le nombre cherché est **108**.

5. La visite

Voici le musée une fois toutes les séparations posées :



6. La mare



On peut diviser le champ B en trois parties.
La partie du haut (trapèze) compte 10 carreaux.
La partie centrale (rectangle) compte 24 carreaux.
La partie du bas (triangle) compte 6 carreaux.
Nombre total de carreaux du champ B : 10 + 24 + 6 = 40 carreaux.
Nombre total de carreaux de la mare : 6 carreaux.
Aire de la mare : 1440 : 40 · 6 = **$216\ m^2$**.

7. L’hôtel

Vendredi, Angela sera dans la chambre 5, comme indiqué sur sa porte (2 va en 5). Comme Angela est en 1 le samedi et que dans cet hôtel on change de chambre toujours de la même manière, alors, sur la porte 5, c’est noté « Allez en 1 ». Alexis qui est en 5 le jeudi, doit aller en 1 le vendredi. Par un raisonnement identique, on sait (passage d’Alexis du vendredi au samedi) que sur la porte 1, c’est indiqué « Allez en 4 ». Alors, Barak passe à la chambre 4 le vendredi. Le passage de Barak du vendredi au samedi nous informe que sur la porte 4, il est noté « Allez en 3 ». Alors, Johann sera dans la chambre 3 vendredi. En mettant François dans la chambre 2 le vendredi, tout fonctionne correctement.

	1	2	3	4	5
Jeudi	Barak	Angela	François	Johann	Alexis
Vendredi	**Alexis**	**François**	**Johann**	**Barak**	**Angela**
Samedi	Angela	Johann	Barak	Alexis	François

8. L’âge du Raul

Soit A, l’année de naissance de Raoul.

1989 – A = 3 fois la somme des chiffres de A = multiple de trois.

Comme 1989 est un multiple de 3, alors 1989 – A est aussi un multiple de 3.

Années possibles de naissance = 1986, 1983, 1980, 1977, etc.

Raoul doit avoir au moins 30 ans, car $1 + 9 = 10$, et $3 \cdot 10 = 30$. La recherche par tâtonnement dans le tableau suivant permet de trouver assez vite la solution. Et il n’est pas trop difficile de se persuader que c’est la seule.

Années de naissance	1986	1983	1950	1941	1938	1935
Sommes des chiffres	24	21	15	15	21	18
Triples des sommes des chiffres	72	63	45	45	63	54
Ages	3	6	39	48	51	54

Raoul est né en 1935. Il avait donc **<u>54 ans</u>** le 14 juillet 1989.

On pourrait trouver la réponse avec une méthode utilisant le calcul littéral.

a) Le capitaine est né en 19ab, et ab = 10a + b, a et b étant compris entre 0 et 9.

   $1989 - 19ab = 1989 - 1900 - 10a - b = 89 - 10a - b$.

   D’où l’équation $89 - 10a - b = 3\,(1 + 9 + a + b)$. Cette équation donne $59 = 13a + 4b$, qui n’est vraie que pour $a = 3$ et $b = 5$. Raoul est né en 1935.

b) Le capitaine est né en 18ab, et ab = 10a + b, a et b étant compris entre 0 et 9.

   $1989 - 18ab = 1989 - 1800 - 10a - b$.

   D’où l’équation $189 - 10a - b = 3\,(1 + 8 + a + b) = 27 + 3a + 3b \Rightarrow 162 = 13a + 4\,b$.

   Comme $13a + 4\,b$ peut valoir au maximum 153 ($13 \cdot 9 + 4 \cdot 9$), alors cette équation ne conduit pas à une seconde solution.

9. Le soleil

Dans Vénus, il y a les voyelles e et u. Comme Vénus vaut 30 francs, on peut dire que $e + u = 30$. (1)

Dans Mercure, il y a deux e et un u. Alors, $2e + u = 43$. (2)

De (1) et (2), on tire que $e = 13$. Alors $u = 17$.

Dans Uranus, il y a deux u et un a. Alors, $2u + a = 54$. Comme $u = 17$, alors $a = 20$.

Jupiter = $u + i + e = 2a$ (deux fois le a de Mars). Alors, $17 + i + 13 = 40$. Alors, $i = 10$.

Pluton = $u + o = 2e$ (les deux e de Terre. Alors, $17 + o = 26$. Alors, $o = 9$.

Soleil = $o + e + i = 9 + 13 + 10 = 32$.

Prix du Soleil : **<u>32 fr.</u>**

10. La mise à l'heure

Supposons que Matteo a mis à l'heure juste ses quatre montres à 12h00.

A = Montre qui indique l'heure exacte.

B = Montre qui avance de 90 secondes par heure.

C = Montre qui retarde de 2 minutes par heure.

D = Ecart entre B et A, soit B – A.

E = Ecart entre C et A, soit C – A.

A	B	C	D	E
12h00	12h00	12h00		
13h00	13h01'30"	12h58'	+ 1'30"	– 2'
14h00	14h03'	13h56'	+ 3'	– 4'
15h00	15h04'30"	14h54'	+ 4'30"	– 6'

Le tableau nous montre que la montre qui indique l'heure exacte n'est ni celle qui avance, ni celle qui retarde. Donc, c'est celle qui indique 17h20 ou 17h30. A partir de là, quatre cas sont possibles, comme nous le montre le tableau suivant.

A	B	C	D	E
17h20'	17h30'	17h14'	+ 10'	– 6'
17h20'	17h42'	17h14'	+ 22'	– 6'
17h30'	17h42'	17h14'	+ 12'	– 16'
17h30'	17h42'	17h20'	+ 12'	– 10'

Dans le 1er tableau, on a vu que la valeur absolue de E est toujours plus grande que celle de D. Le seul cas qui correspond dans le second tableau est celui où l'heure exacte est de 17h30.

On sait maintenant que la montre qui retarde est celle qui indique 17h14 et celle qui avance est celle de 17h42. La montre qui s'est arrêtée indique 17h20.

A 17h30, l'écart entre la montre qui retarde de 2 minutes et celle qui donne l'heure exacte est de 16 minutes. On sait que cet écart augmente de 2 minutes par heure. Il aura donc fallu 8 heures pour obtenir un tel écart. Alors, Matteo avait mis à l'heure ses montres à **<u>9h 30</u>** (17h30 - 8h). Ou à 9 heures et demie.

11. Les croix

Soit R, le nombre de boules rouges et V, le nombre de boules vertes. Trois cas peuvent se présenter :

a) Sergio ôte 2 boules rouges. Le couple (R, V) devient (R – 1, V).

b) Sergio ôte 2 deux boules vertes. Le couple (R, V) devient (R + 1, V – 2).

c) Sergio ôte une boule de chaque couleur. Le couple (R, V) devient (R – 1, V).

On constate que le nombre de croix vertes ne bouge pas ou diminue de 2. Cela signifie que le nombre de croix vertes est toujours impair car on en a un nombre impair au départ. Dans ce cas, sur les 4 restantes, on aura **<u>1 ou 3 boules vertes</u>**.

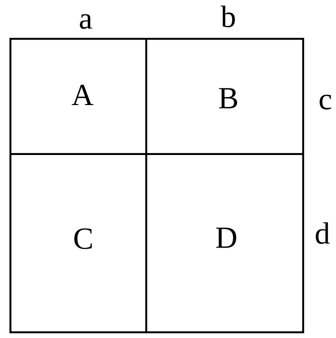
Vérifions que ce sont des cas possibles. On a vu que jouer le cas a revient au même que jouer le cas c. On laisse donc tomber le cas c. Dans le tableau suivant, on constate qu'en jouant systématiquement le cas b (ôter 2 boules vertes), on peut obtenir 76 R et 3 V (colonne x). Pour passer de 47 V (croix vertes de la colonne y) à 3 V (croix vertes de la colonne x), il a fallu jouer 22 fois $\left(\frac{47-3}{2}\right)$. D'où 76 = 54 + 22.

Jouons maintenant les cas a. On arrive aisément à 1 R et 3 V. On voit dans la partie de droite du tableau que l'on peut obtenir 3 R et 1 V.

			y		x											
Cas →		b	b	b	b	a	a	a		b	b	a	a	a	a
Croix rouges	52	53	54	…	76	75	…	1		76	77	76	75	…	3
Croix vertes	51	49	47	…	3	3	…	3		3	1	1	1	..	1

12. Le potager

Attribuons à chaque rectangle les côtés (a, b, c et d) et les aires (A, B, C et D).



Il est facile de prouver que $A \cdot D = B \cdot C$. En effet, $ac \cdot bd = bc \cdot ad = abcd$.

A = 21 m²
B = 25,2 m²
C = 34 m²

Aire de D = $\dfrac{34 \cdot 25{,}2}{21} = 40{,}80$ m^2.
Aire totale du jardin : 21 + 25,2 + 34 + 40,8 = 121 m^2.
Côté du carré : $\sqrt{121} = 11$ m.

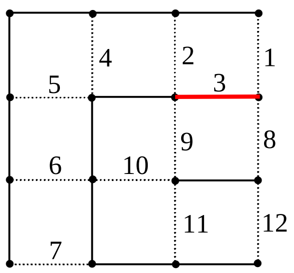
On sait que $a \cdot c = 21$ et $b \cdot c = (11 - a)\,c = 25{,}2$.

Alors, $a = \dfrac{21}{c} \Rightarrow \left(11 - \dfrac{21}{c}\right) \cdot c = 25{,}2 \Rightarrow 11c - 21 = 25{,}2 \Rightarrow c = 4{,}2$.

Largeur de la parcelle de 25,2 m^2 = **<u>4,2 m</u>**.

a = 5 m ; b = 6 m ; d = 4,8 m.

13. Les points



Numérotons les traits restants (1 à 12).

Le tableau ci-dessous nous assure avec suffisamment d'exemples, qu'en traçant le **<u>trait 3</u>**, Heinz peut s'assurer **<u>7 points</u>**.

Dans le tableau les traits qui rapportent un point sont soulignés et ceux qui rapportent deux points sont soulignés et en italique.

Pour Heinz, l'astuce consiste à ne pas tracer un trait qui pourrait lui rapporter 2 points afin de passer la main à Charles. Ainsi, il ne fait pas le trait 6 dans (a, H_2) ou le trait 11 dans (b, H_2) ou le trait 9 dans (c, H_2).

Tout autre départ va faire que Charles engrangera plus de deux points, donc moins de 7 points pour Heinz.

	H_1	C_1	H_2	C_2	H_3	Points de H
a	3	1	<u>2</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, 7	*<u>6</u>*, 8	<u>9</u>, <u>10</u>, <u>11</u>, <u>12</u>	7
a	3	1	<u>2</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, 7	8	*<u>6</u>*, <u>9</u>, <u>10</u>, <u>11</u>, <u>12</u>	9
b	3	8	<u>9</u>, <u>10</u>, 12	*<u>11</u>*, 1	<u>2</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, <u>7</u>	7
b	3	8	<u>9</u>, <u>10</u>, 12	1	<u>2</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, <u>7</u>, *<u>11</u>*	9
c	3	11	<u>10</u>, <u>12</u>, 8	*<u>9</u>*, 1	<u>2</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, <u>7</u>	7
c	3	11	<u>10</u>, <u>12</u>, 8	1	<u>2</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, <u>7</u>, *<u>9</u>*	9

14. Les cyclopes

Le matin du 1er janvier, les cyclopes apprennent que l'un d'eux, au moins, a un œil bleu. Cette information est essentielle pour démarrer le raisonnement par récurrence qui va suivre. En effet, sans cette information, s'il n'y avait qu'un seul cyclope avec un œil bleu sur cette île, ce cyclope n'aurait pas eu moyen de connaître la couleur de son œil. La donnée ne nous dit rien d'autre sur les couleurs des yeux des cyclopes. Il y a peut-être des cyclopes avec un œil vert, rouge, jaune…

Attribuons des numéros aux 40 cyclopes : 1, 2, 3, 4, …, 38, 39 et 40.

Cas A. Supposons qu'il n'y ait qu'un seul cyclope (le 1) avec un œil bleu, le matin du 1er janvier.

> Le 1er janvier, comme le 1 ne voit aucun autre œil bleu, il sait que c'est lui qui a un œil bleu, et qu'il va mourir dans la nuit de 1er au 2 janvier. Les autres cyclopes ne peuvent pas savoir la couleur de leur œil.
>
> Le 2 janvier, tous les cyclopes restants constatent que le 1 est mort. Les 39 autres cyclopes savent maintenant que le l était le seul avec un œil bleu, et ils n'ont aucun moyen de connaître la couleur de leur œil.

Cas B. Supposons qu'il n'y ait que deux cyclopes (1 et 2) avec un œil bleu, le matin du 1er janvier.

Le 1er janvier, le 1 ne voit qu'un seul œil bleu. Il se dit que s'il n'a pas un œil bleu, le 2 fera le même raisonnement que dans le cas A où il n'y avait qu'un seul cyclope avec un œil bleu, et il mourra la nuit prochaine. Le 2 tient le même raisonnement que le 1.

Le 2 janvier, le 1 constate que le 2 n'est pas mort. Il sait donc qu'il a aussi un œil bleu. Le 2, par le même raisonnement, sait aussi qu'il a un œil bleu.

Les 1 et 2 meurent dans la nuit du 2 au 3 janvier. Les survivants savent maintenant qu'il n'y a que deux cyclopes avec un œil bleu, et ils n'ont aucun moyen de connaître la couleur de leur œil.

Cas C. Supposons qu'il n'y ait que trois cyclopes (1, 2 et 3) avec un œil bleu, le matin du 1er janvier.

Le 1er janvier, le 1 ne voit que deux cyclopes avec un œil bleu. Il se dit que s'il n'a pas un œil bleu, les 2 et 3 feront le même raisonnement que dans le cas B, et alors, ils mourront dans la nuit du 2 au 3 janvier.

Le 3 janvier, le 1 constate que les 2 et 3 ne sont pas morts. Il sait donc qu'il a aussi un œil bleu. Les 2 et 3 font exactement le même raisonnement que le 1.

Les 1, 2 et 3 meurent dans la nuit du 3 au 4 janvier. Les survivants savent maintenant qu'il n'y a que trois cyclopes avec un œil bleu, et ils n'ont aucun moyen de connaître la couleur de leur œil.

Le même raisonnement peut être continué à l'infini. Résumons :

Un seul cyclope avec un œil bleu $\Rightarrow$ ce cyclope meurt dans la nuit du 1 au 2 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil.

Deux cyclopes exactement avec un œil bleu $\Rightarrow$ Ces deux cyclopes meurent dans la nuit du 2 au 3 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil.

Trois cyclopes exactement avec un œil bleu $\Rightarrow$ Ces trois cyclopes meurent dans la nuit du 3 au 4 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil. Etc.

Neuf cyclopes exactement avec un œil bleu $\Rightarrow$ Ces neuf cyclopes meurent dans la nuit du 9 au 10 janvier. Les autres cyclopes ne sauront jamais la couleur de leur œil.

Le matin du 1er janvier, il y avait **31 cyclopes** (40 − 9) qui n'avaient pas un œil bleu.