35e championnat des jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne - 18 novembre 2020

Solutions

1. La tablette de chocolat

Wendy prend les 6 carrés de la ligne du haut et donne à son petit frère les 3 carrés restants de la colonne de droite. Nombre de carrés restants = 24 – 6 – 3 = **<u>15</u>**.

2. Le compte est bon

Solution : 12 **–** 10 **+** 9 **–** 5 = 6.

3. Le carré

1	3	2
3	2	1
2	1	3

4. Les cerises

Colonne a : Ramon prend 1 cerise et Charlotte en attrape 3.

Colonne b : Ramon prend 4 cerises et Charlotte en attrape 6. Ramon a maintenant 5 cerises et Charlotte en a 9.

Colonne c : Ramon prend 7 cerises et Charlotte en attrape 9. Ramon a maintenant 12 cerises et Charlotte en a 18.

En continuant ainsi, on constate (colonne e) que lorsque Charlotte possède **<u>45</u>** cerises, elle en a bien 10 de plus que Ramon.

	a	b	c	d	e	f
Prise de Ramon	1	4	7	10	13	16
Prise de Charlotte	3	6	9	12	15	18
Prise totale de Ramon	1	5	12	22	35	51
Prise totale de Julie	3	9	18	30	45	63

5. Les cartes

Numérotons les enveloppes de 1 à 10. Comme trois d’entre elles contiennent au moins 8 cartes, mettons 8 cartes dans les enveloppes 1, 2 et 3. Comme cinq d’entre elles en contiennent au moins 5, mettons 5 cartes dans les enveloppes 4 et 5, et ainsi les cinq premières enveloppes contiennent au moins 5 cartes. En mettant deux cartes dans les enveloppes 6 et 7, on a bien au moins 2 cartes dans sept enveloppes. En mettant une carte dans les enveloppes 8, 9 et 10, on a bien au moins 1 carte dans dix enveloppes. Nombre minimum de cartes que possède Corinne = $3\cdot 8+2\cdot 5+2\cdot 2+3\cdot 1=$**<u>41</u>**.

Numéro des enveloppes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de cartes	8	8	8	5	5	2	2	1	1	1

6. La fête

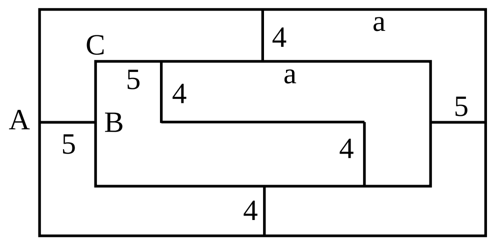
Soit a, la mesure d’un côté des pièces (voir le croquis).

Longueur du rectangle = 5 + 5 + a + 5 = 2a. Alors, a = 15 cm.

Longueur du rectangle = 2a = 30 cm.

Largeur du rectangle = $4\cdot 4$ = 16 cm.

Aire du rectangle = $16\cdot 30$ = **<u>480 cm²</u>**.



7. L'aquarium

Soit M les mâles et F les femelles. Au départ Michelle a 2 M + 3 F (2 mâles et 3 femelles).

Au bout de 1 mois, les 3 F auront donné naissance à 6 M et 9 F. Il y aura en tout 8 M et 12 F.

Un mois plus tard, les 12 F auront donné naissance à 24 M et 36 F. Il y aura en tout 32 M et 48 F, soit un total de **80 poissons**.

8. Les marmottes

Soit B_1, B_2, B_3 et B_4, les marmottes brunes. Soit G_1, G_2, G_3 et G_4, les marmottes grises.

Supposons que B_1 et G_1 partent à 14 h. Elles se déplacent entre 14 h et 14 h 05' 30''.

B_2 et G_2 partent à 14 h 02'. Elles se déplacent entre 14 h 02' et 14 h 07' 30''.

B_3 et G_3 partent à 14 h 04'. Elles se déplacent entre 14 h 04' et 14 h 09' 30''.

B_4 et G_4 partent à 14 h 06'. Elles se déplacent entre 14 h 06' et 14 h 11' 30''.

D'après les périodes de déplacement, on constate que G_1 croise B_1, B_2 et B_3, que G_2 rencontre B_1, B_2, B_3 et B_4, que G_3 croise B_1, B_2, B_3 et B_4, et que G_4 rencontre B_2, B_3 et B_4. Les marmottes grises ont croisé 14 marmottes brunes. Il y eut donc **14 saluts** avec la patte avant droite.

9. La fenêtre

Complétons les cases par les lettres d, e, f et g.

a	b	c	d	5	e	f	g	3

D'après les données, on peut écrire les 7 égalités suivantes.

a + b + c = 10 (1) | d + 5 + e = 13 (4) | f + g + 3 = 16 $\Rightarrow$ f + g = 13 (7)

b + c + d = 11 (2) | 5 + e + f = 14 (5)

c + d + 5 = 12 (3) | e + f + g = 15 (6)

En remplaçant f + g = 13 dans l'équation (6), on obtient e = 2. En remplaçant e = 2 dans l'équation (5), on obtient f = 7. En continuant ainsi, on obtient successivement d = 6, **c = 1**, **b = 4** et **a = 5**.

5	4	1	6	5	2	7	6	3

10. Le numéro de code

Plaçons les huit nombres dans le tableau de gauche ci-dessous. Dans le tableau de droite, notons le nombre de fois que l'on trouve les différents chiffres de chacune des colonnes du tableau de gauche. Par exemple, le chiffre 8 se trouve 1 fois dans la colonne « a » du tableau de gauche, 1 fois également dans la colonne « b », 3 fois dans la colonne « c » et 0 fois dans la colonne « d ».

	a	b	c	d
1er nombre	5	0	8	3
2e nombre	3	9	1	9
3e nombre	2	7	2	1
4e nombre	8	9	0	4
5e nombre	7	4	8	7
6e nombre	1	9	8	3
7e nombre	6	7	5	3
8e nombre	0	8	6	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
b	1	0	0	0	1	0	0	2	1	3
c	1	1	1	0	0	1	1	0	3	0
d	0	1	0	3	2	0	0	1	0	1

Comme un et un seul chiffre est positionné au bon endroit, le nombre total des chiffres positionnés au bon endroit doit être égal à 8 (un nombre de la ligne « a » + un nombre de la ligne « b » + un nombre de la ligne « c » + un nombre de la ligne « d » = 8. Selon le tableau de droite, cinq cas sont envisageables :

1) 0 + 2 + 3 + 3. Alors, c = 8 et d = 3. Cas impossible car 5083 comporterait deux chiffres correctement placés.
2) 1 + 1 + 3 + 3. Alors, c = 8 et d = 3. Cas impossible comme au point 1).
3) 1 + 2 + 3 + 2. Alors, b = 7, c = 8 et d = 4. Tout joue si a = 3.
4) 1 + 3 + 1 + 3. Alors, b = 9 et d = 3. Cas impossible selon le nombre 1983.
5) 1 + 3 + 3 + 1. Alors, b = 9 et c = 8. Cas impossible selon le nombre 1983.

Code cherché : **<u>3784</u>**.

11. Les foulées

Supposons que Mélanie fasse des foulées de 75 cm. Alors, les foulées de Loïc mesurent 125 cm $(75\cdot5:3)$. Distance parcourue par Loïc après 36 foulées = $36\cdot125=4500$ cm = distance parcourue par Mélanie. Nombre de foulées effectuées par Mélanie = 4500 : 75 = 60. Chacun peut vérifier que quelle que soit la longueur des foulées de Mélanie, le nombre de ses foulées effectuées avant qu'elle ne soit rattrapée par Loïc est toujours 60.

Complétons le tableau suivant en partant de la colonne la plus à droite. Comme Mélanie effectue 5 foulées pendant que Loïc en fait 4, la $55^{\text{ème}}$ foulée de Mélanie a été faite en même temps que la 32e de Loïc (colonne a). La 50e foulée de Mélanie a été faite en même temps que la 28e de Loïc (colonne b). La 45e foulée de Mélanie a été faite en même temps que la $24^{\text{ème}}$ de Loïc (colonne c), etc.

							c	b	a	
Nombre de foulées de Mélanie	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Nombre de foulées de Loïc	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36

Lorsque Loïc s'est élancé, Mélanie avait déjà effectué **<u>15 foulées</u>**.

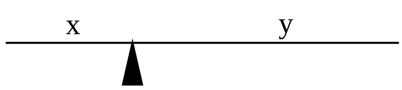
12. La balançoire

Soit f le poids d'une fille et g le poids d'un garçon.

Soit x le bras le plus court de la balançoire et y le bras le plus long.

On a alors les deux équations suivantes :

$4g\cdot x=3f\cdot y$ (1) et $3f\cdot x=g\cdot y$ (2).



De (1), on tire $x=\dfrac{3fy}{4g}$.

Alors (2) devient $3f\cdot\dfrac{3fy}{4g}=gy \Rightarrow 9f^2=4g^2 \Rightarrow 3f=2g \Rightarrow g=\dfrac{3f}{2}=\dfrac{3\cdot43}{2}=$ **<u>64,5 kg</u>**

13. Les clés

Soit D la directrice, DA le directeur-adjoint et a, b, c, d et e les chefs de service.

Numérotons les serrures : 1, 2, 3,..., n. Admettons que les numéros des clés correspondent aux numéros des serrures.

La 3^{e} condition, celle qui concerne les chefs de service, nous permet d'affirmer ceci :

- a et b ne peuvent pas ouvrir le coffre tout seuls car ils ne possèdent pas la clé 1. La clé 1 doit être en possession de c, d et e pour que la serrure 1 puisse être ouverte.
- a et c ne peuvent pas ouvrir le coffre tout seuls car ils ne possèdent pas la clé 2 qui est forcément en possession de b, d et e.

On continue ainsi le même raisonnement.

- a et d ne possèdent pas la clé 3 qui est forcément en possession de b, c et e.
- a et e ne possèdent pas la clé 4 qui est forcément en possession de b, c et d.

- b et c ne possèdent pas la clé 5 qui est forcément en possession de a, d et e.
- b et d ne possèdent pas la clé 6 qui est forcément en possession de a, c et e.
- b et e ne possèdent pas la clé 7 qui est forcément en possession de a, c et d.
- c et d ne possèdent pas la clé 8 qui est forcément en possession de a, b et e.
- c et e ne possèdent pas la clé 9 qui est forcément en possession de a, b et d.
- d et e ne possèdent pas la clé 10 qui est forcément en possession de a, b et c.

Le bilan de la situation est donné dans le tableau suivant dans lequel les croix indiquent les clés détenues par chacun des chefs de service.

Clé →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a					x	x	x	x	x	x
b		x	x	x				x	x	x
c	x		x	x		x	x			x
d	x	x		x	x		x		x	
e	x	x	x		x	x		x		

Notre coffre aurait eu un minimum de 10 serrures si la seule condition imposée était celle des chefs de service. Le nombre 10 correspond au nombre de fois que l'on a deux chefs de services différents parmi cinq chefs de service. Il s'agit d'une combinaison simple dont la formule correspond à $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

Pour que la condition imposée par le directeur-adjoint soit satisfaite, avec un minimum de serrures, il suffit d'ajouter une 11e serrure puis de distribuer la clé 11 à tous les chefs de service et les clés 1 à 10 au directeur-adjoint. Bien sûr, la directrice devra posséder toutes les clés.

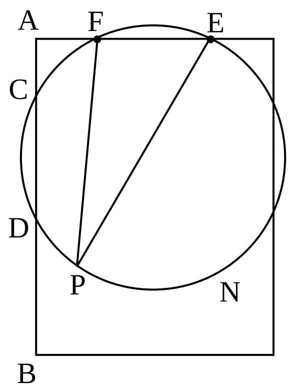
La situation finale peut être représentée ainsi :

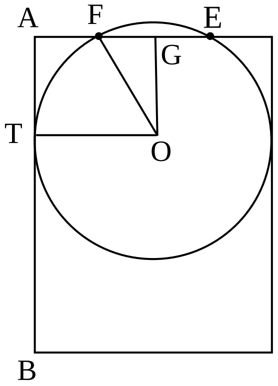
Clé →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a					x	x	x	x	x	x	x
b		x	x	x				x	x	x	x
c	x		x	x		x	x			x	x
d	x	x		x	x		x		x		x
e	x	x	x		x	x		x			x
DA	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
D	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Il existe donc **11 serrures** au minimum.

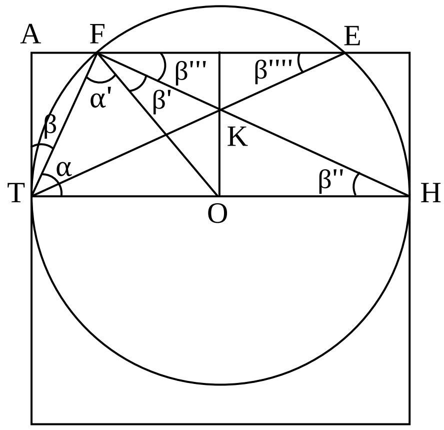
14. Les tirs au but

Traçons un cercle N passant par les deux piquets (E et F) marquant les buts et coupant le segment AB en C et D, comme sur le croquis ci-contre. Si P est un point quelconque situé sur l'arc FE, alors, selon le théorème de l'arc capable, tous les angles FPE sont identiques. D'autre part, plus le rayon du cercle N est petit, plus l'angle FPE est grand. Par conséquent, pour que l'angle de tir soit le plus grand possible, notre cercle doit être tangent au segment AB.





Soit T, le point de tangence du cercle et du segment AB. Le centre du cercle est bien entendu sur la médiatrice du segment FE. On a alors :
$FO^2 = FG^2 + GO^2 \Rightarrow 30^2 = 8{,}4^2 + GO^2 \Rightarrow GO^2 = 829{,}44 \Rightarrow GO =$ **<u>28,8m</u>** = AT.



On aurait pu obtenir la solution par un tout autre chemin.

Le triangle FTO est isocèle, alors $\alpha = \alpha'$.

Ensuite, $\alpha + \beta = 90° = \alpha' + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$. Le triangle FOH est isocèle, alors $\beta' = \beta''$. $\beta'' = \beta'''$ (angles alternes-internes). Le triangle FKE est isocèle (le quadrilatère FTHE est un trapèze isocèle), alors $\beta''' = \beta''''$.

On en conclut que les triangles ATF et ATE sont semblables.

D'où $\frac{AT}{AF} = \frac{AE}{AT} \Rightarrow AT^2 = AF \cdot AE$.

AF = $30 - \frac{16{,}8}{2} = 21{,}6$ et AE = $30 + \frac{16{,}8}{2} = 38{,}4$.

$AT^2 = 21{,}6 \cdot 38{,}4 = 829{,}44 \Rightarrow AT = 28{,}8$.