38e championnat de jeux mathématiques et logiques

Qualification régionale valaisanne – 22 novembre 2023

Solutions détaillées

1. Les fruits
Il y a 7 fruits dans le plat.
Luke en prend 3. Il reste 4 fruits (7 – 3).
Sa mère en ajoute 5. Il y a finalement **9 fruits** (4 + 5).

2. Les cousins
Chaque lettre est remplacée par un symbole. Grâce aux 3 premiers cousins, nous savons que :

Lettre	O	N	Z	E	N	E	U	F	D	I	X
Symbole	☺	🌢	ϟ	✈	🌢	✈	★	☯	✪	✞	⭘

Nous pouvons deviner ce qu'écrit le quatrième cousin :

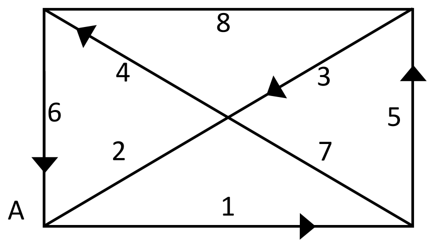
Lettre	D	O	U	Z	E
Symbole	✪	☺	★	ϟ	✈

Le quatrième cousin a **12 ans**.

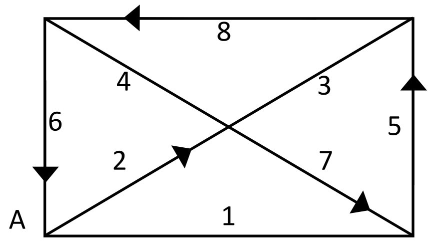
3. La ferme
Leia voit 4 poules qui ont chacune 2 pattes, elle voit 8 pattes de poule (4 x 2).
Leia voit 7 vaches qui ont chacune 4 pattes, elle voit 28 pattes de vache (7 x 4).
Elle voit donc 36 pattes en observant les poules et les vaches (8 + 28).
Or elle voit 56 pattes en tout.
Nous comprenons qu'elle voit 20 pattes de cochons (56 – 36).
Chaque cochon possède 4 pattes. Elle voit donc **5 cochons** (20 ÷ 4).

4. L'écureuil
Observons un chemin possible pour comprendre ce que peut faire l'écureuil.

Il ramassera dans ce cas :
1 + 5 + 3 + 4 + 6 = 19 noisettes



Il existe 28 chemins possibles mais après quelques essais, nous comprenons que l'idéal est de de passer par les sentiers suivants :



L'écureuil ramassera un maximum de noisettes, c'est-à-dire : 2 + 7 + 5 + 8 + 6 = **28 noisettes**.

5. Le code postal
Tous les chiffres sont différents et l'addition des 2 premiers vaut 12.
Le code postal peut commencer par 93, 84, 75, 57, 48 ou 39.

L'addition du 2e et du 3e vaut 6. Il est donc impossible que le code commence par 39, 48 ou 57 (2e nombre trop grand). Il est également impossible qu'il commence par 93 (le 3e chiffre serait 3 et les chiffres ne seraient pas tous différents).
Le code peut commencer par 842 ou 751.

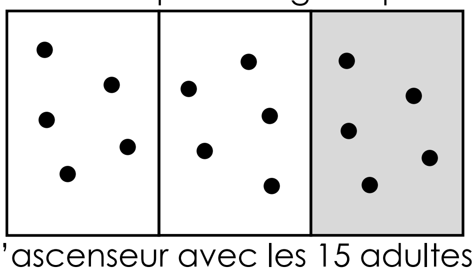
L'addition du 3e et du dernier vaut 4. Nous ne pouvons pas accepter 8422 (les chiffres doivent être différents). Il nous reste uniquement : **7513**.

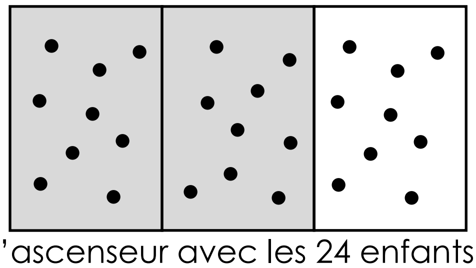
6. Le livre de maths
Les 9 premières pages seront numérotées avec un seul chiffre par page : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nous utilisons 9 chiffres pour y parvenir.

Les 90 pages suivantes, c'est-à-dire les pages 10 à 99, sont numérotées à l'aide de 2 chiffres par page. Nous utilisons 180 chiffres (2 x 90) pour y parvenir.

Pour le reste de ce livre, il reste 288 – 9 – 180 = 99 chiffres.
Or les pages suivantes ont besoin de 3 chiffres par page pour être numérotées. Il est donc possible d'en numéroter encore 33 autres (99 ÷ 3).
Ce livre contiendra **132 pages** (99 + 33).

7. L'ascenseur
Cet ascenseur peut contenir 15 adultes ou 24 enfants qui sont un peu plus légers.
Pour résoudre cette énigme, il existe de nombreuses possibilités. Essayons de le faire avec l'aide d'un dessin. 15 et 24 sont dans le livret du 3. Nous allons découper l'ascenseur en 3 parties égales pour comprendre la situation.


L'ascenseur avec les 15 adultes


L'ascenseur avec les 24 enfants

Si les 5 adultes entrants occupent une des 3 parties de l'ascenseur (par exemple, celle de gauche), il reste encore 2 parties de libre pour les enfants (celles de droite).
Il reste de la place pour ajouter **16 enfants** dans cet ascenseur.

8. Les sapins
Si nous connaissions l'aire des petits triangles et des petits rectangles, tout deviendrait simple. Tentons de trouver cela avec ce que nous avons comme information.

Faisons des essais en espérant que ces aires soient des nombres entiers de cm^2.

Si l'aire du triangle est de 1 cm^2, celle du rectangle sera de 7 cm^2 (11 – 1 – 1 – 1 – 1).
Et l'aire du sapin intermédiaire devra être de 27 cm^2 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7 + 7).
Ce n'est pas le cas, ça ne fonctionne pas.

Si l'aire du petit triangle est de 2 cm^2, celle du rectangle sera de 3 cm^2. Dans ce cas, par contre, tout fonctionne.

Nous pouvons déterminer l'aire du grand sapin qui est de **34 cm^2**.

9. Le puzzle
Le nombre de pièces en largeur multiplié par le nombre de pièces en longueur doit valoir 2023.
Or $2023 = 7 \cdot 17^2$, nous en déduisons que $2023 = 1 \cdot 2023 = 7 \cdot 289 = 119 \cdot 17$.

Le premier cas de figure ne nous intéresse pas car si nous avions 1 pièce de large, il y aurait des pièces à 3 bords et trop de pièces à 2 bords. Nous l'éliminons rapidement.

Si le puzzle avait 7 pièces de large, nous trouverions 5 pièces à 1 bord à gauche (il faut enlever celles à 2 bords en haut et en bas). Il y aurait 287 pièces à 1 bord en haut. Cela constituerait un tas de plus $2 \cdot 5 + 2 \cdot 287 = 584$ pièces. Ce cas est à éliminer car il dépasse les 500.

Le dernier cas de figure nous permet de comprendre qu'il y a **264 pièces** dans le tas considéré ($2 \cdot 117 + 2 \cdot 15$).

10. L'horloge
Observons l'aiguille liée au pentagone pour commencer. Elle pointe vers le haut et cela se produit toutes les 5 minutes. La réponse cherchée est donc un multiple de 5.

Continuons avec l'aiguille liée au triangle. Elle pointe vers le haut lorsque le nombre de minutes qui se sont écoulées est un multiple de 3. Elle pointe donc vers la droite lorsque nous ajoutons 1 minute à un multiple de 3. Ces deux premières conditions (multiple de 5 et une unité de plus qu'un multiple de 3) sont réunies après : 10 minutes, 25 minutes, 40 minutes, 55 minutes, 70 minutes, etc.

Par le même raisonnement, nous comprenons que nous avons ajouté 3 unités à un multiple de 4 (aiguille liée au carré). Cela ne fonctionne ni avec 10 (7 + 3), ni avec 25 (22 + 3), ni avec 40 (37 + 3) mais cela fonctionne avec 55 (52 + 3).

Padmé voit cette configuration pour la première fois après **55 minutes**.

11. Les poissons
Dans cet aquarium, il y a des poissons bleus, des poissons verts et peut-être d'autres poissons. Partons du principe que les autres potentiels poissons sont tous rouges.
Résumons cela avec un tableau :

Poissons	Nombre
Bleus	a
Rouges	b
Verts	c

Il faut prendre 11 poissons pour être sûr d'avoir au moins 2 bleus. Cela signifie que 9 ne sont pas bleus. Cela signifie que : b + c = 9.
De même, on comprend que : a + b = 16 grâce à la deuxième phrase.

La troisième phrase nous fait comprendre que la couleur la plus représentée l'est par 12 poissons (il faut un 13e pour être sûr d'avoir une 2e couleur). Il ne peut pas s'agir des rouges ou des verts car b + c = 9 donc ni b, ni c ne peut valoir 12. Il y a donc 12 poissons bleus.

Nous pouvons remplir le tableau :

Poissons	Nombre
Bleus	12
Rouges	4
Verts	5

Et conclure qu'il y a **21 poissons** dans cet aquarium.

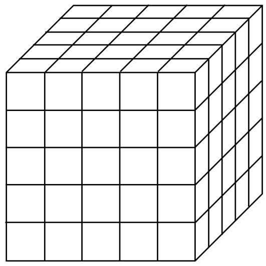
12. Le cube
L'arête du grand cube ne peut pas être composée de moins de 4 petits cubes car 1^3, 2^3 et 3^3 sont inférieurs à 60, il ne sera pas possible d'avoir 60 cubes non peints.
L'arête du grand cube ne peut pas être composée de plus de 5 petits cubes. En effet, dès que l'arête est composée de 6 petits cubes, nous aurons au sein de ce grand cube 4^3 petits cubes qui ne peuvent jamais être peints. Cela est supérieur à ce qui est attendu, c'est-à-dire 60.

Si l'arête du grand cube est composée de 4 petits cubes, nous avons 64 petits cubes. Il est nécessaire de peindre au moins une face (sinon nous avons 64 cubes non peints), c'est-à-dire 16 petits cubes. Dès lors, il restera 48 petits cubes non peints ce qui n'est pas assez. Nous sommes certains que ce grand cube est composé de 125 petits cubes.

Comment peindre les faces ?
Nous pouvons peindre :
· 0 face (cas 0)
· 6 faces (cas 6)
· 1 face (cas 1)
· 5 faces (cas 5)
· 2 faces opposés (cas 2.1)
· 2 faces adjacentes (cas 2.2)
· 4 faces avec 2 faces non peintes opposées (cas 4.1)
· 4 faces avec 2 faces non peintes adjacentes (cas 4.2)
· 3 faces reliées par un sommet (cas 3.1)
· 3 faces dont 2 sont opposées (cas 3.2)

Déterminons pour tous ces cas le nombre de petits cubes non peints :

Cas	Calcul	Cubes non peints
0	5^3	125
1	$5^2 \cdot 4$	100
2.1	$5^2 \cdot 3$	75
2.2	$4^2 \cdot 5$	80
3.1	4^3	64
3.2	$3 \cdot 4 \cdot 5$	60
4.1	$3^2 \cdot 5$	45
4.2	$4^2 \cdot 3$	48
5	$3^2 \cdot 4$	36
6	3^3	27



Seul le cas 3.2 nous intéresse. Les petits cubes qui possèdent 2 faces peintes sont ceux qui se situent sur les arêtes joignant ces grandes faces. Il y a 2 arêtes qui lient ces grandes faces et chacune est composée de 5 petits cubes.
Nous pouvons conclure que **10 petits cubes** sont peints sur 2 faces après destruction du grand cube.

13. Le café

Postulons que x représente la somme dont dispose Shmi et posons une équation.

Dans le premier cas de figure, le prix moyen du kilogramme aurait été de 14 francs car elle aurait acheté la même quantité de Robusta que d'Arabica.
Shmi aurait ramené $\frac{x}{14}$ kilogrammes de café.

Elle a finalement utilisé la moitié de la somme pour chaque sorte de café. Elle a ramené $\frac{x}{2\cdot 12} + \frac{x}{2\cdot 16}$ kilogrammes de café.

La consigne nous permet d'affirmer que :

$$\frac{x}{14} + 2 = \frac{x}{2 \cdot 12} + \frac{x}{2 \cdot 16}$$

D'où :

$$\frac{x}{7} + 4 = \frac{x}{12} + \frac{x}{16}$$

$$\frac{48x}{336} + \frac{1344}{336} = \frac{28x}{336} + \frac{21x}{336}$$

$$48x + 1344 = 28x + 21x$$

Nous pouvons conclure que Shmi est partie avec 1344 francs.

Elle a ramené **98 kilogrammes de café** (1344 : 2 : 12 + 1344 : 2 : 16).

14. L’immeuble

Observons cet exemple.
Nous venons de construire la 5e diagonale et nous avons 15 appartements occupés.
Nous avons rempli un carré en enlevant quasiment la moitié.
Nous avons, en fait, enlevé la moitié du carré sans sa diagonale de 5 appartements en gris.
Ce procédé est généralisable. Lorsque nous remplissons la ne diagonale, nous aurons occupé $n^2 - \frac{n^2-n}{2}$ appartements.

11				
10	12			
4	9	13		
3	5	8	14	
1	2	6	7	15

Constatation 1 : La ne diagonale se termine par l’appartement n° $\frac{n^2+n}{2}$

Constatation 2 : La ne diagonale est numérotée en descendant en bas à droite si n est impair. Sinon elle est numérotée en montant en haut à gauche.

Nous pouvons tâtonner un peu et obtenir le résultat suivant :

Diagonale	Se termine par	Sens
63e	2016	En bas à droite
64e	2080	En haut à gauche
65e	2145	En bas à droite

Construisons la partie de l’immeuble qui nous intéresse :

2138							
2023	2139						
	2022	2140					
		2021	2141				
			2020	2142			
				2019	2143		
					2018	2144	
					2016	2017	2145

L’appartement recherché porte le **n° 2138**.